This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

ARTES 1837 SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

QA
31
.E88
S731
1701

Euclides.

ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ AC SOLIDÆ.

Quibus accedunt ſelecta

EX ARCHIMEDE THEOREMATA,

Auctore

ANDREA TACQUET,

Soc. JESU Sacerd. & Matheſeos Profeſſore.



AMSTELÆDAMI,
Apud FRANCISCUM van der PLAATS.
MDCCI.

[illegible]

AMICE LECTOR,

CUm multis jam annis Elementorum Geometricorum, minoris formæ, in hiſce locis penuriâ laboratum eſſet, viſum denique eſt ad uſum ſtudioſæ juventutis, cujus gratiâ hunc laborem qualemcumque ſuſcepi, novam editionem adornare; in quâ quid præſtitum ſit, paucis accipe.

1. Inprimis Geometriæ planæ ac ſolidæ elementa conjunxi, ne (ut fit plerunque) ſemper in planis tyrones hæreant, ſed ab his tranſeant ad ſolida, quorum ſummè neceſſaria cognitio eſt.

2. Propoſitionum hypotheſibùs & aſſertionibus litteras, parentheſi incluſas, quibus ad figuram referri poſſint, appoſui: quod eo conſilio feci, ne ante demonſtrationem, iterum explicanda aſſertio, adeóque idem bis repetendum eſſet: & tamen litteris à reliquo ſenſu parentheſi ſeparatis, ſua aſſertioni univerſalitas conſtaret. Aſſertionem igitur conveniet legere primùm litteris prætermiſſis; tum ſi non intelligas, te litteræ ad figuram ducent.

3. Propoſitiones aliquas prætermiſi, quarum fere vel nullus uſus eſt, aut certè non alius, quàm ut per eas demonſtrentur aliæ, quas ſine *illis* faciliori viâ poteram demonſtrare. Eoſdem tamen propoſitionum retineo numeros, quos

CM 5-17-26
29580

Euclides, ordinemque ſervo, quem bis mille annorum uſus probavit.

5. Demonſtrationes vel novas affero, vel antiquas breviores plerumque ac faciliores conor efficere. Et prolixitas quidem raro prodeſt. Ea ſiquidem tardiores & hebetiores non juvat, ſubtilibus autem & ingenioſis moleſta eſt.

5. Quamvis autem brevis eſſe ſtuduero, exiſtimavi tamen, me à propoſito non recedere, ſi ea adderem, quæ Geometriam diſcere volentibus futura uſui videbantur. Itaque Corollaria & Scholia adjunxi non pauca, quæ uſu longo didici in elementis deſiderari. Geometriæ practicæ fontes indico ſuis locis. Tum ſi quid illuſtre ad rem occurreret, non omiſi. Varia deinde, in quibus laboratum hucuſque fuit, vel explicare, vel demonſtrare conatus ſum.

6. In libro primo parallelarum theoria demonſtratur independenter ab undecimo axiomate, quod non axioma, ſed theorema eſt, & quidem non niſi difficulter ac longo circuitu demonſtrabile.

7. Secundum librum, in quo laborare multùm tyrones ſolent, diſpoſui ad eum fere modum, quo jam analyſtæ ſcribunt æquationes ſuas. Quem ſi exactè tenere voluiſſem, fuiſſet quidem res brevior; ſed minùs, ut arbitror, tyronibus accommodata.

8. In libro tertio ad prop. 16. paradoxa anguli contactûs, quæ hactenus torſére omnes, ſolvuntur.

9. In

9. In quinto libro proportionum doctrinam, ut quidem ab Euclide traditur, ſatis ſpinoſam, efficere planiorem conatus ſum. Itaque primùm proportionum elementa, faciliori quâdam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur. Deinde hujus libri ſextam definitionem, quâ proportionum æqualitas per multiplices explicatur, oſtendi non definitionem eſſe, ſed theorema, & quidem difficile & perobſcurum, cujus etiam demonſtrationem exhibemus, hactenus à nullo datam. Atque ita demonſtrationes Euclidæas, quæ hinc ducuntur omnes, ſi quis fortè illas præ noſtris probationibus deſideret, ſtabilivimus. Tum aliud quoddam æqualium proportionum aſſigno, ac demonſtro indicium univerſale, primum, facillimum, ex quo omnes quinti libri propoſitiones demonſtrare potuiſſem, ſi hoc conducere diſcentibus judicâſſem. Poſtremò de proportionibus non pauca ſcitu neceſſaria ſubjungo, ac inprimis demonſtro axioma illud percelebre, ſeu potiùs theorema; proportionem extremorum ex quotlibet intermediorum proportionibus componi, id quod hactenus in Geometriâ fuit deſideratum.

10. Librum duodecimum, cujus difficiles ac prolixæ demonſtrationes diſcentibus terrori eſſe ſolent, aliâ viâ plus quàm decies breviori demonſtravi. Quod ita ſe habere, qui hæc

noſtra cum Euclide ejuſque commentatoribus contulerit, deprehendet.

11. In libris quarto, ſexto, undecimo præſtantur ea, quæ univerſim ſuprà indicavimus.

12. Denique ſelecta ex Archimede theoremata aliâ ſimiliter ac breviori viâ demonſtrata adjunxi; eximiamque illius de cylindro ac ſphærâ doctrinam, poſtremis tredecim propoſitionibus adjectis ampliavi, quibus inter cætera demonſtro, ſeſquialteram proportionem ab eo in cylindro ſphæráque repertam ab æquilatero cono eidem ſphæræ circumſcripto, tam in ſoliditate, quàm in ſuperficie continuari. Euclidi porro Archimedæa illa ſubnexui; non quaſi adhuc elementa, ſed quia ſubtilitate pariter atque uſu eximia ſunt: tum deinde, ut Geometriæ candidatus intelligat, cùm maximi Geometræ inventa admiranda aſſequi ſeſe viderit, nihil in Matheſi futurum tam ſubtile vel arduum, quod his inſtructus elementis percipere non poſſit.

Tu hæc habe, &, ſi placuerint, lege ac diſce, inventurus in his principia nobiliſſimæ & fortè omnium antiquiſſimæ ſcientiæ; quod oſtendet tibi, quam ſubnecto,

HISTO-

HISTORICA NARRATIO

De ortu & progreſſu Matheſeos.

MAthematum elementa tradituro viſum eſt de illorum origine ac præſtantiâ præfari quædam, ut intelligant Matheſeos candidati, cujuſmodi ea ſcientia ſit, cui ſe conſecraturi ſunt, & planum fiat adversùs eos, qui, quæ ignorant, contemnunt, quantæ dignitatis ſint hæ diſciplinæ, quas omnium ætatum ſapientiſſimi viri incredibili ſtudio ſibi putaverint comparandas. Uſui porrò mihi fuit in hac relatione concinnandâ Petri Rami diligentia, qui Scholarum toto primo libro bene magno Mathematicam Hiſtoriam ex Proclo, Laërtio, Vitruvio, Gellio, Polybio, Tzetze, aliiſque accuratè copioſéque conſcripſit.

Prima hominum ſcientia Matheſis fuit, ſi Joſepho credimus. Is lib. 1. cap. 3. ſcribit, Sethi nepotes Cœlorum ordinem ac ſiderum curſus obſervâſſe. Ne autem hæc inventa ex hominum notitiâ dilaberentur, cùm Adamus univerſalem mundi interitum fore prædixiſſet, unum diluvio, incendio alterum, excitârunt duas columnas, alteram lateritiam, alteram lapideam, & utrique ſua inventa inſcripſerunt, ut, ſi lateritiam diluvio deleri contingeret, lapidea ſuperſtes, hominibus diſcendi copiam faceret, &, quæ inſcripta continebat, ſpectanda exhiberet. Ajunt enim lapideam illam ab ipſis dedicatam, quæ & noſtris temporibus exſtat in Syriâ. Hæc ille, penes quem fides eſto.

Poſt diluvium primos mortalium Aſſyrios & Chaldæos Mathemata coluiſſe tradunt idem

Joſephus, Plinius, Diodorus, Cicero. Sed ortæ & florentes apud Chaldæos Mathematicæ artes, deinde ex Chaldæâ & Aſſyriâ ad Ægyptios tranſlatæ ſunt Auctore Abrahamo. Is enim, cùm Deo jubente ex patrio ſolo in Palæſtinam, ac deinde in Ægyptum profectus eſſet, cerneretque Ægyptios artium bonarum capi ſtudio, atque indole ad diſcendum egregiâ eſſe, ut apud eundem Joſephum eſt lib. 1. cap. 9. Arithmeticam illis Aſtronomiamque, quam præcedere Geometriam neceſſe fuit, communicavit. Quibus deinde ſtudiis adeò Ægyptii floruere, ut Ariſtoteles 1. Metaph. cap. 1. affirmet, Mathematicas artes primùm in Ægypto à ſacerdotibus publicâ vacatione fretis inventas eſſe.

Exinde Matheſis ex Ægypto mare trajiciens ad Græciæ Philoſophos pervenit: Thales enim Mileſius, qui ante Chriſtum floruit annis 584, primus Græcorum cùm in Ægyptum veniſſet, Geometriam inde in Græciam tranſtulit. Is ſanè, præter alia, primi libri propoſitiones, 5, 15, 26. invenit, Eidem debentur 2, 3, 4, 5, l. 4. cujus inventi lætitiâ elatus bovem immolâſſe dicitur. Idem Æquinoctia & Solſtitia obſervare cœpit Laërtio teſte; & Solis eclipſium, ut ſcribunt Hippias & Ariſtoteles, primus prædixit; & Tzetzes auctor, etiam eclipſim Lunæ Regi Cyro prænunciâiſſe. Quapropter hic primus in Græciâ Mathematicæ ſcientiæ parens atque Auctor fuit.

Poſt hunc Pythagoras Samius ille Philoſophorum antiquiſſimus Mathematicas diſciplinas vehementer auxit ornavitque. Et Arithmeticam quidem ita coluit, ut omnis propè illi ratio philoſophandi ex numeris duceretur, Geometriam verò, ut refert Laërtius, à materiâ abſtra-

ſtraxit primus: in quâ mentis elatione invenit 32, 44, 47, lib. 1. Sed inprimis ob inventas 32. & 47. lib. 1. celebratur, & hujus quidem inventionis lætitiâ tantâ affectus eſt, ut, teſte Apollodoro apud Laërtium, hecatomben immolâſſerit. Idem incommenſurabiles magnitudines, & regularia quinque corpora primus aperuit. Idem Aſtrologiam & Muſicam impensè & docuit & exercuit. Neque ſolùm acutè & ſubtiliter multa invenit, ſed etiam ludum primus aperuit, in quo juventus tam honeſtas, tamque nobiles artes addiſceret.

Pythagoram Anaxagoras Clazomenius & Oenopides Chius ſecuti ſunt, quorum meminit Plato in Amatoribus, ubi adoleſcentes de Anaxagorâ & Oenopide in circulorum deſcriptionibus concertantes inducit. Ab Anaxagorâ Geometriam quandam ſcriptam indicat Ariſtoteles, & ex Laërtio accepimus oſtenſum ab eo Solem Peloponneſo majorem (nota Aſtronomiæ incunabula) eundemque de habitationibus in Lunâ nonnulla diſputâſſe. Oenopidi adſcribit Proclus 12. & 23. l. 1. Hos excepére Briſo, Antipho, & Chius Hippocrates, omnes, tentatâ circuli quadraturâ, ab Ariſtotele reprehenſi pariter & celebrati. Sed hos inter longè clariſſimus Hippocrates fuit, ille è mercatore Philoſophus & Geometra, qui præter circuli quadraturam, etiam cubi duplicationem primus tentavit per duas medias proportionales, quam viam, ut ſingularem & unicam, omnis poſteritas amplexa eſt. Illius etiam illa propria & magna laus eſt, quòd, Proclo teſte, elementa primus ſcripſerit & ab aliis inventa ordinaverit.

Democritus non in Philoſophiâ ſolùm, ſed etiam in Matheſi admirabilis fuit, ejus tum

 Phy-

Phyſica, tum fortè etiam Mathematica monumenta perierunt invidiâ (ut quidam ferunt) Ariſtotelis ſua unius ſcripta cupientis legi. Democriti Philoſophiam Petrus Gaſſendus eruditiſſimo opere nuper edito inſtauravit. Theodorus Cyrenæus, licèt ejus inventa Mathematica non exſtent, vel eo nomine magnus eſt, quòd Platonis Magiſter fuiſſe memoretur.

Ad Platonem igitur aliquando pervenimus, quo nemo alius ſplendorem majorem attulit Mathematicis diſciplinis. Ille Geometriam maximis acceſſionibus amplificavit, ſtudio incredibili in eam collocato. Et inprimis reperta eſt ab eo Analyſis, certiſſima inveniendi & ratiocinandi via. Philoſophiæ ſuæ libros Mathematicis rationibus diſtinxit, ac quidquid in Mathematicis admirabile conjunctum cum Philoſophiâ eſſet, excitavit. Academiæ foribus inſcriptum legebatur : *οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω ; nullus Geometriæ expers accedito* : illuſtri ſanè argumento quàm non aliena ſed propria, quámque non inutilis, vel indecora, ſed honeſta & commoda Matheſis ſanæ certæque Philoſophiæ ſit. Quantus certè Plato Matheſeos fuerit & admirator & cultor, is demum intelliget, qui ejus monimenta perlegerit.

Ex Platonis Academiâ propè innumeri deinceps Mathematici prodierunt. Tredecim Platonis familiares à Proclo commemorantur, quorum ſtudiis Mathematica ſit abſoluta. Hinc Leodamas Thaſius, Archytas Tarentinus, Theætetus Athenienſis, à quibus Mathemata egregiè ſunt amplificata. Leodamus Analyſim à Platone acceptam exercuit, ejuſque ope inveniſſe multa à Laërtio dicitur. Theætetum tum inventa ſua, inter quæ Elementa ab eo

ſcripta

ſcripta & regularium corporum inſcriptio celebrantur, illuſtrem faciunt, tum Platonis encomia, qui etiam illius nomini dialogum inſcripſit. Archytas Elementa ſcripſit etiam ipſe, ejuſque duplicatio cubi apud Eutocium legitur, cujus etiam illa ſingularis fuit laus, quòd Mathematicam ad humanos uſus traduxerit fere primus, unde & lignea columba ab eo facta volâſſe legitur apud Gellium. Quem ſecuti Dædalus, aliique artifices fabulis Poëtarum materiam præbuere. Archytas porrò & Mathematicus fuit & exercitûs Imperator, qui nimirum in patriis bellis copiis civium ſuorum quinquies præfuit & quinquies vicit. Neoclidis tantùm nomen celebratur, qui Leonte fortaſſis diſcipulo illuſtrior quàm inventis ſuis. Leon ſanè Mathematicæ univerſæ elementa conſcripſit, auxit & ad uſum aptiora fecit. Quare inter præcipuos elementorum conditores ſuo merito cenſeri debet.

Eudoxus Gnidius ſuperiorum æqualis, in Arithmeticis magnus & (ſi Scholiaſtæ Græco credimus) totum ei Quintum librum debemus. Elementa item conſcripſit, & generaliora effecit, & ſectiones à Platone inchoatas auxit; inſuper Aſtronomicarum hypotheſium primus fabricator exſtitit, & Geometriæ fontes, ut ſuprà Archytas, ad Organicam ac Mechanicam derivavit. Amyelas Heracleotes & Menechmus, ejuſque frater Dinoſtratus, Helicon Cyzicenus, Theudius, Hermotimus Colophonius, Philippus Mendæus, omnes Platonici, Geometriam multò perfectiorem reddiderunt. Et Menechmus quidem ſectiones conicas invenit, ac harum ope duas medias, cujus inventio ab Eutocio reliquis præfertur. Theudius & Hermotimus

mus elementa fecerunt univerſaliora & auctiora. Atque hi omnes ex Platonis Academiâ Mathematicam Philoſophiam ad perfectionem adduxerunt, ait Proclus. Sed & Xenocrates Platonis auditor, & Ariſtotelis magiſter, ipſeque Ariſtoteles cognitione Mathematum clari fuére. Illius cùm auditor quidam eſſe vellet Geometriæ imperitus, abi, inquit, anſas enim Philoſophæ non habes.

De *Ariſtotele* verò quid dicam, libri illius omnes locis Mathematicis ſunt referti, ex quibus in unum collectis librum confecit Blancanus. Ex Ariſtotelis ſcholâ duo præcipuè celebrantur. Eudemus & Theophraſtus. Hic ſcripſit de numeris libros duos, de Geometriâ quatuor, de lineis individuis unum; ille hiſtoriam Mathematicam condidit, ex quo Proclus aliique ſua mutuati ſunt. Aryſteo, Iſidoro, Hypſicli Geometris ſubtiliſſimis ſolidorum libros maximè debemus. Denique Euclides aliorum inventa collegit, ordinavit, auxit, demonſtravitque accuratiùs, eaque nobis reliquit elementa, quibus jam ubique terrarum ad Mathematicam juventus inſtituitur. Obiit anno ante Chriſtum 284. Euclidem ſecuti ſunt centum fere pòſt annis Eratoſthenes & Archimedes. Eratoſthenis clarum inprimis nomen fuit, ſed ejus ſcripta periêre. Archimedis habemus multa, multa amiſimus.

Sed Archimedem cùm nomino, apicem quendam humanæ ſubtilitatis, totiuſque Mathematicæ diſciplinæ abſolutionem animo concipio. Ejus inventa admiranda prodidère Polybius, Plutarchus, Tzetzes, aliique. Archimedi coævus fuit Conon Geometra & Aſtronomus, cujus mortem Archimedes deflet in lib.

de

de quad. parab. Archimedem & Cononem intervallo non magno ſequitur Apollonius Pergæus, alter Geometriæ princeps, qui egregiæ laudis encomio magnus Geometra fuit appellatus. Illius exſtant quatuor Conicôrum ſubtiliſſimi libri. Eidem adſcribuntur Euclidis libri 14 & 15, ab Hypſicle contracti. Hipparchus & Menelaus, de ſubtenſis in circulo hic 6, ille 12 libros primi conſcripſere, pro quo invento tam utili & neceſſario non parva utrique laus & gratia debetur. Exſtant etiam Menelai de triangulis ſphæricis libri tres. Theodoſii Tripolitæ utiliſſimi ſphæricorum libri tres in omnium manibus verſantur. Atque hi quidem, ſi Menelaum exiſpias, ante Chriſtum vixére omnes.

Anno poſt Chriſtum 70 venit in lucem Claudius Ptolemæus, Aſtronomorum princeps, vir planè mirabilis, ſupraque (inquit Plinius) naturam mortalium. Is verò non Aſtronomiæ tantùm, ſed etiam Geometriæ peritiſſimus fuit; quod teſtantur, tum alia multa ab eo ſcripta, tum in primis libri de ſubtenſis, Menelai quidem 6, Hipparchi verò 12, ab illo ad 5 theoremata contracti. Plutarchi etiam nominatiſſimi Philoſophi exſtant Mathematica problemata. Jam Eutocii Aſcalonitæ erudita in Archimedem commentaria quis ignorat? Ab eo Philonis, Dioclis, Nicomedis, Spori, Heronis, tanquam excellentium in Mathematicis Magiſtrorum inventa de duplicando cubo recenſentur; Et Heronis quidem tam in Mechanicis, quàm in Geometricis excellens ingenium fuit. Cubi certè duplicatio ab eo tradita, a Pappo l. 3. p. 7. laudatur præ omnibus. Cteſibii Alexandrini, cui antlias debemus noſtras, admiranda opera à Virtuvio, Proclo, Plinio, Athenæo ce-

celebrantur. Gemini quoque non minimum inter Mathematicos nomen eſt, quem Euclidi ipſi Proclus in quibuſdam præpoſuit.

Diophantus, & ipſe Alexandrinus, in Arithmeticâ tantus fuit, quantus in Geometriâ Archimedes, Apollonius, Euclides, verè totius numericæ ſubtilitatis magiſter, à quo reperta ſit admirabilis illa ars, quam Algebram dicimus; quæ hiſce temporibus à Franciſco Vietâ, & Renato Carteſio multò perfectior & univerſalior effecta eſt. Reliqui inter veteres celebrantur Nicomachus Arithmeticis, Geometricis, Muſicis clarus monimentis, Serenus binis de cylindri ſectione libris Geometris notiſſimus, Proclus, Pappus, Theon. Quantus Mathematicus fuerit Proclus, ex doctiſſimis ejus in Euclidem commentariis, aliiſque ſcriptis manifeſtum eſt. Atque hic opinor ille eſt, qui, ut refert Zonaras, & ex eo Ramus, ac Baronius, ſub annum Chriſti 514. Vitaliani claſſem Conſtantinopolim obſidentis, Optico ſpeculorum artificio combuſſit. Theonis laudes verè magnus mirabiliter exaggerat Petrus Ramus, ut etiam libros, quos Euclidi hactenus adſcripsére omnes, Theoni putet attribuendos. Sed iniquior ubique in Euclidem Ramus, neque ullo ſolido nixus fundamento, hîc audiendus non erit. Ut finis aliquando ſit, agmen Pappus claudat tempore inter veteres poſtremus, ut qui vixerit circa annum 400, ſed nominis claritudine, omnique laude Mathematum primis adnumerandus. Quæ ante Hypſiclem, Cteſibium, & Diophantum protulerat fœcunda ingeniorum parens Alexandria, hunc quoque ingenti bono Matheſeos dedit. Scripſit collectionum Mathematicarum libros ſeptem, è quibus duo primi pe-

perierunt. Reliqui quinque tam multis abundant, tamque variis, ex omni propè genere Mathematum nobiliſſimis inventis, ut inter prima quæ exſtant veterum monimenta ab omnibus cenſeantur.

Habetis originis ac progreſſionis Mathematicæ hiſtoriam brevem. Ex quâ Matheſeos antiquitas, præſtantia, ac dignitas apparet. Sanè Reip. litterariæ principes, iidem qui Philoſophiam, etiam Mathematicam genuére, gemellas ſorores partu velut uno, quas qui diſtrahere ab invicem violentè velit, næ ille in nativam illarum concordiam cum inſigni injuriâ crudelis ſit: quando, quod fieri in gemellis ſolet, uno vel loco vel morte ſublato, languere, quin & contabeſcere alterum neceſſe ſit.

APPROBATIO CENSORIS.

Elementa Geometriæ R. P. Andreæ Tacquet, Societ. JESU, *ad inſtructionem illorum, qui ſcientiam illam ſectantur, utiliter imprimentur. Actum 9. Aprilis* 1654.

GUILLIELMUS BOLOGNINO
S. Th. L. Canon. & Lib.
Cenſor Antv.

FA-

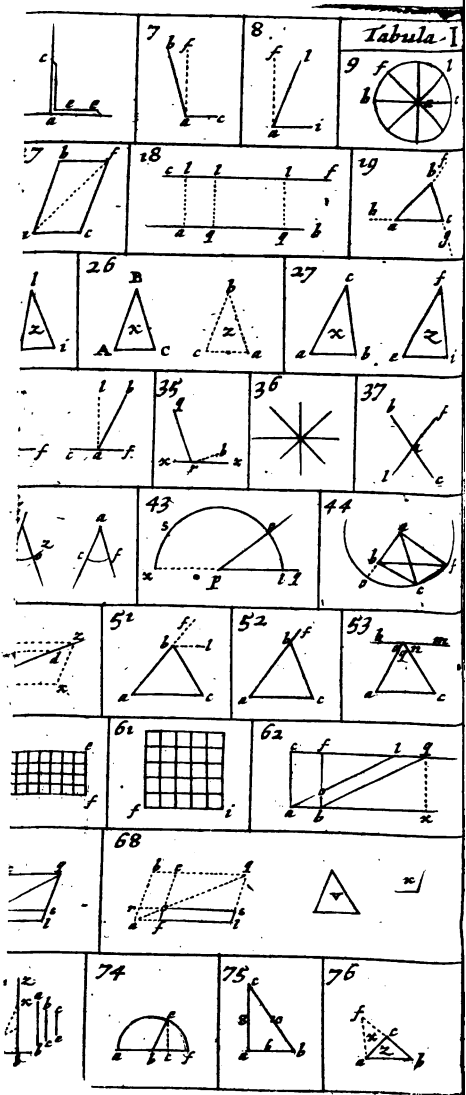
FACULTA

R. P. PROVINCIALIS.

EGo *infraſcriptus* Societatis JESU
Flandro-Belgicam Præpoſitus Provin
lis, poteſtate mihi factâ ab admodum R.
N. Goſuwino Nickel, Præpoſito Generali e
dem Societatis, facultatem concedo, ut E
menta Geometriæ planæ ac ſolidæ, demonſ
tæ brevi ac facili methodo, & tyronum c
tui magis accomodatâ, unà cum ſelectis
Archimede Theorematis, aliiſque novis
monſtrationibus, Auctore P. ANDRE
TACQUET, *omnia ab aliquot Societa*
noſtræ Mathematicis approbata, typis m
dentur: in quorum fidem has manu noſtrâ ſ
ſcriptas, & ſolito officii ſigillo munitas de
mus. Antverpiæ 18. *Martii* 1654.

JOANNES BAPTIST
ENGELGRAV

ELE


Tabula I

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER PRIMUS.

SCientiæ proprium munus eſt, ex notionibus quibuſdam ſimpliciſſimis, rationali naturæ à conditore Deo impreſſis, elicere aliquid, quod priùs ignorabatur, atque inde rurſum aliud ex alio; ut prior cognitio ſemper ad ulteriorem ſit gradus. Quæ ratio ſi accuratè teneatur, ex minimis, & per ſe notis, ad rerum abditiſſimarum cognitionem pertingemus. Hanc methodum, rationemquè ſcientiæ, præ omnibus amplexæ ſunt eæ diſciplinæ, quæ in quantitatis contemplatione verſantur. Quo fructu id factum ſit ſciunt omnes, qui hiſce ſtudiis imbuti ſunt. Et ſanè Geometria (ut de aliis Matheſeos partibus jam nihil dicam) mirum eſt, quàm brevi ex apertiſſimis ad obſcuriſſima trahat, & ex humillimis ad altiſſima ſtatim aſſurgat. Statuuntur primò ſimpliciſſima quædam facillimaque principia, quibus nemo ratione præditus diſſentire poſſit. Deinde nihil aſſeritur, vel admittitur, quod ex iis infaillibili ratiocinio non ſit deductum. Atque ita demum admiranda theoremata, ab

 om-

omni humano ſenſu & cognitione remota, incredibili certitudine ac evidentiâ innoteſcunt.

Principiorum genera, ex quibus Geometria omnis derivatur, ſunt tria, Definitiones, Poſtulata, Axiomata.

DEFINITIONES.

1. PUnctum eſt ſignum in magnitudine individuum.

Hoc eſt, quod dividi ne cogitatione quidem poſſit. Punctum omnis magnitudinis quaſi principium eſt, ſicut unitas numeri.

2. Linea eſt magnitudo tantùm longa.

Nimirum carens omni latitudine. Intelligitur generari ex fluxu puncti.

3. Lineæ termini ſunt puncta.

Fig. 1. tabulâ 1. 4. Recta linea eſt, quæ ex æquo ſuis terminis interjicitur.

Vel ut Archimedes: Recta linea eſt minima linearum eoſdem terminos habentium: ſive eſt omnium breviſſima, quæ inter duo puncta duci poſſunt.

Vel ut Plato: Recta linea eſt, cujus extrema obumbrant omnia media.

Unus omnium ſenſus eſt: Inſtrumentum, quo rectæ lineæ deſcribuntur, regula eſt: quæ utrùm recta ſit, hoc examine licebit cognoſcere.

Juxta regulam deſcribatur linea, tum regulam inverſam, ſic ut extremitas priùs dextra jam ſit

ſini-

ſiniſtrà, rurſum applica lineæ priùs deſcriptæ, ſi planè cum illâ congruat, recta eſt regula; ſi non congruat, non erit recta. Ratio pendet ex axiomate 13.

5. Superficies eſt magnitudo tantùm longa & lata.

Duas ergo habet dimenſiones. Intelligitur generari ex fluxu lineæ.

6. Superficiei extrema ſunt lineæ.

7. Planum, ſive ſuperficies plana eſt, quæ ex æquo inter ſuas extremas lineas jacet.

Vel ut Hero: ſuperficies plana eſt, cujus omnibus partibus recta linea accommodari poteſt.

Generatur enim ſuperficies plana ex fluxu lineæ rectæ.

Vel: plana ſuperficies eſt, cujus extrema obumbrant omnia media.

Vel: plana ſuperficies eſt minima omnium eoſdem terminos habentium. *Idem ſenſus eſt omnium.*

Non definivit hic corpus ſive ſolidum Euclides, quia nondum hic erat acturus de corpore. Ne quis tamen illius definitionem deſideret; corpus eſt magnitudo longa, lata, & profunda. Tres igitur dimenſiones habet corpus, ſuperficies duas, linea unam, punctum nullam.

8. Angulus planus eſt duarum linearum in plano ſe mutuò tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Fig. 2. 4. *Angulum igitur efficiunt duæ lineæ B A, C A, ſe mutuò tangentes in A, ſic ut non exiſtant ſibi mutuò in directum; hoc eſt; non efficiant unam lineam.*

9. Latera ſeu crura anguli, ſunt lineæ, quæ angulum efficiunt.

10. Vertex anguli eſt punctum (A) in quo crura ſibi mutuò occurrunt.

Fig. 2. 4. *Cùm angulus eſt unicus, unâ litterâ ad verticem poſitâ deſignatur. Cùm plures ad unum punctum exiſtunt, deſignantur tribus literis, quarum media denotat verticem anguli; vel etiam ſubinde unicâ lateribus propè verticem interpoſitâ. Sic in figurâ 5. angulus qui fit à lineis B A, C A, deſignatur vel literis tribus B A C, vel unicâ O.*

Fig. 3. 11. Anguli æquales, vel potiùs ſimiles dicuntur, ſi, cùm ſibi invicem vertices imponuntur, latera unius congruant lateribus alterius. *Ad hoc non requiritur, ut latera ſint æquè longa.*

Fig. 2. 3. 12. Inæquales, ſeu diſſimiles dicuntur anguli, cùm vertice & uno latere congruentibus, alterum non congruit: & ille major dicitur, cujus latus cadit extra. *Sic angulus B A E major eſt angulo B A C.*

Fig. 5.

Angulus non minuitur, vel augetur, licèt crura minuas vel augeas.

Porrò quia anguli natura in linearum inclinatione conſiſtit, inclinatio autem linearum quantitas non eſt, neque angulus ullus quantitas erit.

Et

Et ſanè eodem jure curvitas eſſet quantitas, quo angulus, cum ab invicem non magis differant, quam inflexio & infractio. Quando igitur cum Euclide, aliiſque Geometris, angulos æquales eſſe dicimus, nihil aliud, quàm inclinationum ſimilitudo, hoc eſt, laterum congruentia indicabitur. Vide quæ de hac re pleniùs dicturi ſumus poſt propoſitionem 1[illegible]3.

13. Angulus rectilineus eſt, quem rectæ lineæ efficiunt; curvilineus, quem curvæ; mixtus, quem recta & curva. *Fig. 2. 4.*

14. Cùm recta (C A) ſuper rectam (B F) conſiſtens in neutram inclinat partem, ac proinde angulos utrimque facit æquales, (C A B) & (C A F) rectus eſt uterque æqualium angulorum: Recta autem (C A) alteri inſiſtens dicitur perpendicularis, ſeu perpendiculum. *Fig. 6.*

Angulus rectus ſic etiam definiri poteſt.

Rectus angulus is eſt, (B A C) cui à parte alterâ æqualis oritur (C A F) ſi unum latus (B A) produxeris. *Fig. 6.*

Duæ regulæ ſic compactæ, ut angulum rectum contineant, inſtrumentum efficiunt, quod norma appellatur. Illius inventorem Vitruvius c. 2. l. 9. affirmat Pythagoram. Tanta verò anguli recti vis eſt in rebus omnibus conſtruendis, dimetiendis, formandis, & firmandis, ut nihil ferè effici ſine illo poſſit. Normæ examen ſic inſtituitur. Ejus latus

A E applica rectæ lineæ A F, & juxta latus alterum deſcribatur recta C A. Converſâ deinde normâ verſùs B, ſi utroque ſuo latere congruat rectis C A, A B, ſoito eſſe legitimam & exactam. Ratio patet ex ipſâ def. 14.

Fig. 7. 15. Obtuſus angulus eſt (B A C), qui recto (F A C) major eſt.

Fig. 8. 16. Acutus angulus eſt (L[illegible] I), qui recto (F A D) minor eſt.

17. Figura plana eſt ſuperficies plana, unâ vel pluribus lineis undiquæ terminata.

Fig. 9. 18. Circulus eſt plana ſuperficies, unius lineæ circuitu comprehenſa, quæ circumferentia dicitur, à quâ ad aliquod punctum intrà contentum (A) omnes, quæ duci poſſunt rectæ lineæ, ſunt æquales.

Fig. 9. 19. Hoc vero punctum centrum appellatur.

Fig. 9. 20. Diameter circuli eſt recta per centrum ducta, (B C) ad circumferentiam utrimque terminata, & circulum bifariam dividens.

Fig. 9. 21. Semidiameter, ſive radius, eſt recta (A F,) ex centro ad circumferentiam ducta.

Fig. 9. 22. Semicirculus eſt figura (B L C) comprehenſa à diametro (B C) & dimidiâ circumferentiâ (B L C.)

Cir-

Circulus ita generatur: ſi recta linea (AB) uno extremo ſuo (A) manente fixo, in orbem circumagatur, recta ipſa circulum, extremitas illius altera (B) circumferentiam producet. Porrò mira circuli indoles vel in ipſo exortu ſuo apparet. Ad ejus namque geneſim contraria concurrunt, motus & quies, dum linea movetur, & ejus extremum quieſcit. Dein lineæ generanti puncta omnia, cùm in æquales eòdem tempore periodos abſolvam, diverſâ celeritate moventur.

Tertiò, peripheria circulum ambiens conſtat quodammodo ex contrariis, & extremis ſine medio; ex concavo nimirum & convexo, inter quæ rectum ita medium eſt, ut æquale inter magnum & parvum; idque eo mirabilius eſt quòd ea contraria inſint lineæ nullam latitudinem habenti. Hæc tria Ariſtoteli viſa ſunt admiranda, ex quo illa depromſimus. At prodigia circuli longè majora aperuimus in diſſertatione Phyſico-Mathematicâ, quam unà cum Cylindris & angularibus in lucem emiſimus anno 1652: iſthic ea leget, qui volet.

Circumferentiam Mathematici partiri ſolent in 360. æquales partes (quas gradus vocant) ob multas illius numeri commoditates, ſemicircumferentiam in 180., quadrantem in 90.

23. Rectilinea figura eſt ſuperficies plana, rectis lineis undique terminata.

24. Triangulum, ſive trilaterum, eſt plana ſuperficies tribus rectis comprehenſa.

Hæc figurarum rectilinearum prima ac ſimpliciſſima eſt, in quam ceteræ omnes reſolvuntur.

25. Triangulum æquilaterum eſt, Fig. 10.

A 4 quod

quod tria latera habet æqualia.

Fig. 11, 12. 26. Triangulum Iſoſceles, ſeu æqui-crure, quod duo tantùm latera habet æqualia.

Fig. 13. 27. Scalenum, quod tria latera inæqualia habet.

28. Rectangulum triangulum eſt, quod unum angulum habet rectum.

29. Obtuſangulum triangulum eſt, quod unum angulum habet obtuſum.

30. Acutangulum triangulum eſt, quod tres habet acutos angulos.

Fig. 15. 31. Inter figuras quadrilateras, rectangulum eſt, quod quatuor angulos habet rectos, adeòque æquales: *ſive latera æqualia ſint, ſive non.*

Fig. 16. 32. Quadratum eſt, quod æquilaterum, & rectangulum eſt, *ac proinde æquiangulum.*

Fig. 14. 15. 16. 17. *Omne quadratum eſt rectangulum, ſed non contrà.*

33. Rhombus eſt, qui æquilaterus, ſed non æquiangulus eſt.

34. Rhomboides, quæ adverſa latera & angulos habens æqualia, neque æquilatera, neque æquiangula eſt.

Fig. 17. 35. Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cujus bina oppoſita latera (A B, FC,

FC, & BF, AC) ſunt parallela. Quid vero ſint parallelæ, dicetur ſeq. defin.

Omne rectangulum, & quadratum eſt parallelogrammum; ut ſuo loco demonſtrabitur. Sed non contrá.

36. Rectæ lineæ parallelæ ſeu æquidiſtantes ſunt, quæ in eodem plano exiſtentes, utrimque in infinitum protractæ, æqualibus ſemper intervallis inter ſe diſtant.

Æqualia intervalla deſumuntur penes perpendiculares. Quare ſi omnes ad unam ex duabus parallelam A B perpendiculares Q L æquales fuerint, dicentur rectæ A B, C F, parallelæ.

Generantur parallelæ, ſi recta L Q ad rectam A B perpendicularis, per A B ſemper perpendiculariter moveatur, tunc enim ejus extremum L deſcribit parallelam C F.

Euclides definit parallelas eſſe, quæ utrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidunt. Verùm quia dantur lineæ, quæ ſimul in infinitum productæ, licèt ad ſe mutuò appropinquent ad intervallum quovis dato minus, ac proinde, licèt non ſint parallelæ, nunquam tamen concurrant, (cujuſmodi ſunt hyperbola & recta linea, conchois & linea recta; item duæ æquales parabolæ circa eundem axem deſcriptæ, & plures aliæ;) Non videtur per ſe notum eſſe, duas rectas, licèt nunquam concurrant, fore ſemper æquali intervallo diſſitas, hoc eſt æqui-diſtantes: poſſet enim quiſpiam objicere, fieri fortaſſis poſſe, ut etiam ipſæ, licèt ad ſe mutuo ſemper appropinquarent, tamen nunquam concurrerent. Quare Euclidæa definitio

paralleliſmi naturam non ſatis explicat.

Fig. 17. 37. Parallelogrammi & cujusvis quadrilateri diameter eſt recta (AF) per angulos oppoſitos ducta.

38. Figuræ planæ pluribus lateribus, quàm quatuor comprehenſæ, multilateræ ſeu multangulæ, ſeu græcâ voce, polygonæ vocantur.

39. Rectilineæ figuræ externus angulus eſt, qui latere producto extra figuram

Fig. 19. oritur. *Tales ſunt FBC, GCA, HAB. Tot igitur figura qualibet habet externos angulos, quot latera, & angulos internos.*

Poſtulata.

POſtulatum eſt, quod facilè fieri poſſe per ſe ſit manifeſtum. Poſtuletur ergo, ut concedatur.

1. A quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

2. Rectam lineam terminatam in directum & continuum protendere.

3. Quovis centro ad quodvis intervallum circulum deſcribere.

Axiomata.

AXioma eſt ſententia per ſe manifeſta.

1. Quæ eidem ſunt æqualia, & inter

ſe

ſe æqualia ſunt. Et quod uno æqualium majus aut minus eſt, majus quoque aut minus eſt altero æqualium: & converſim.

2. Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

3. Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanebunt, erunt æqualia.

4. Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5. Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt inæqualia.

6. Quæ ejuſdem dimidia ſunt, inter ſe ſunt æqualia: & quæ ejuſdem ſunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter ſe æqualia ſunt.

7. Quæ mutuo ſibi congruunt, æqualia ſunt.

Non rectè Clavius hoc Axioma convertit. Falſum eſt enim, ea, quæ univerſim inter ſe æqualia ſunt, ſibi mutuò congruere: Diſſimiles enim magnitudines poſſunt eſſe æquales, neque tamen congruent. Quòd ſi ſimiles & æquales fuerint, valebit converſa. Statuamus igitur axioma.

8. Si rectæ lineæ æquales fuerint, ſibi mutuò congruent: & anguli ſi æquales fuerint, ſibi mutuò congruent.

9. Totum ſuâ parte majus eſt.

10. Omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.

Eu-

Fig. 20. *Euclidis axioma undecimum eſt* : Si in duas rectas AB, CF, incidens recta GI, angulos ad eandem partem interiores, BLQ, FQL, fecerit duobus rectis minores, duæ illæ rectæ ſi protrahantur, tandem concurrent ad illam partem, ad quam ſpectant anguli duobus rectis minores.

Hoc verò non eſt clarius illo, quod Prop. demum 29. Euclides ipſe demonſtrat : videlicet, ſi anguli B L Q, F Q L, fuerint duobus rectis æquales, rectæ A B, C F, nunquam concurrent.

Quare axioma illud è principiorum numero cum Gemino & Proclo, aliiſque Geometris, rejecimus: eſt enim non axioma, ſed theorema; idque demonſtrabimus poſt Propoſitionem 31. hujus libri.

Ex defin. 36. *Ejus loco alia duo ſequentia ſubſtituo, quorum veritas ex definitione parallelismi ſtatim apparet. Eſto igitur axioma.*

11. Parallelæ lineæ communi perpendiculo utuntur.

Hoc eſt, recta, quæ ad parallelarum unam perpendicularis, eſt quoque perpendicularis ad alteram.

Fig. 21. 12. Perpendicula bina (L O, Q I,) ex parallelis æquales utrimque intercipiunt partes (L I, O Q.)

13. Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

Ad hoc ſiquidem opus eſt ad minimum tribus.

14. Duæ rectæ lineæ nequeunt habere ſegmentum commune: & omnes

rectæ

rectæ punctualiter ſe interſecant.

Rectæ A X occurrat recta Z D, ea ſi producatur non perget per D A, ſed in E, ſic ut rectam X A non niſi punctualiter interſecet. Axioma ex notione ipſâ rectæ lineæ evidentiſſimum eſt. Tamen quia nonnulli tam ſubtiliter philoſophantur, ut credant rectas lineas aliquâ ſui parte commiſceri poſſe, lubet in eorum gratiam hoc axioma ampliùs declarare. Fig. 22.

Habeant, ſi fieri poteſt, duæ rectæ A X, A Z, partem communem A D. Centro A deſcribatur circulus, ſecans rectas in B, & C, tum accipiatur arcus B F æqualis arcui B C, intelligatur ducta eſſe recta F A.

Rectæ igitur C A & F A eundem prorſus ſitum habent reſpectu rectæ B A. Sed recta C A cum rectâ B A habere dicitur commune ſegmentum D A, ergo etiam recta F A habet cum B A commune ſegmentum D A.

Tres jam igitur rectæ C A, B A, F A commune D A ſegmentum habent.

Sumatur rurſum arcus F G æqualis prioribus B F, & C B, & intelligatur ducta eſſe recta G A. Rurſum liquet rectas B A, G A, eundem habere ſitum reſpectu rectæ F A. Sed jam oſtenſum eſt, rectam B A habere cum rectâ F A commune ſegmentum D A. Ergo etiam recta G A cum F A commune habet ſegmentum D A.

Jam ergo rectæ quatuor C A, B A, G A, F A, commune D A ſegmentum habent. Eodem prorſus modo oſtendam, ſi per totam circuli circumferentiam ſumantur arcus prioribus æquales, omnes ſimul circumquaque rectas lineas ductas ad A unum idemque habituras commune ſegmentum D A. Hoc tam immane abſurdum ſequitur ex eo, quòd ponerent-

rentur bina rectæ C A, B A, habere ſegmentum commune. Impoſſibile eſt igitur ut duæ rectæ ſegmentum commune habeant.

In hoc axiomate vis tota nititur illius celebrati in ſcholis argumenti, quo demonſtratur, magnitudinem ex punctis omnino indiviſibilibus numero finitis componi non poſſe: & eſt ejuſmodi. Conſtent ſi fieri poteſt magnitudines ex punctis. Circa idem centrum deſcriptæ intelligantur quotcumque circumferentiæ circulares, & ponatur extima ſeu maxima componi ex centies mille punctis, à quibus ſingulis ad centrum commune ductæ intelligantur rectæ lineæ.

Ex axiomate jam explicato certum eſt, rectas illas nuſquam commiſceri, niſi in centro ſolo. Quare dum omnes medias peripherias pertranſeunt, in iis æquè multa deſignant puncta ac erant in extimâ. Omnes igitur circumferentiæ concentricæ æquè multis punctis conſtant, ac proinde omnes inter ſe æquales erunt. Atque ita circumferentia, hac in chartâ, deſcripta æqualis probabitur circumferentiæ firmamenti. Aliis propè innumeris demonſtrationibus hic error obruitur. Sed unam illam hoc loco attuli præ cæteris, quòd paſſim ſit decantata, & ex præſenti axiomate immediatè pendeat.

Propoſitionum aliæ faciendum aliquid proponunt, & vocantur Problemata; aliæ in ſolâ contemplatione conſiſtunt, quæ idcirco Theoremata inſcribuntur.

PRO-

PROPOSITIONES.

Citationes requiſitæ reperiuntur ad marginem. Cùm citantur propoſitiones, primus numerus numerus deſignat propoſitionem, littera (l.) cum numero ſequenti librum denotat: ut ſi occurrat (per 5. l. 3.) ita lege (per propoſitionem quintam libri tertii.) Figura quærenda ſemper eſt inter figuras ejus libri, in quo tum verſamur: citationes reliquæ facilè intelligentur.

Traduntur hoc libro affectiones primæ triangulorum & parallelogrammorum. Propoſitiones illuſtriores ſunt 32. 35. 37. 41. 44. 45. 47.

PROPOSITIO PRIMA.

Super datâ rectâ (AB) triangulum æquilaterum conſtituere. Fig. 23.

Centro A, intervallo A B *a* deſcribatur circulus F C B, & centro B, intervallo eodem B A deſcribatur circulus A C L, priorem ſecans in puncto C, ex quo ducantur rectæ C A, C B. a *Per poſtul.* 3.

Dico triangulum A C B factum eſſe æquilaterum. Nam recta A C eſt *b* æqualis rectæ A B, cùm ſint ejuſdem circuli F C B ſemidiametri; & recta B C etiam æqualis eſt eidem rectæ B A, cùm ambæ ſint ſemidiametri circuli L C A. Ergo A C, B C, b *Per def.* 18.

c ſunt

c Per axio. c ſunt æquales inter ſe: ac proinde omnia latera trianguli ſunt æqualia. Ergo triangulum d ACB & æquilaterum eſt, & ſuper datá rectâ AB conſtitutum, quod erat faciendum.

d Per def. 26.

PROPOSITIO II.

Fig. 24. *AD datum punctum (A) data recta (EF) æqualem ponere.*

a Poſtul. 3. Accipe circino *a* intervallum EF, & transfer ex A in D, erit recta AD par datæ EF.

PROPOSITIO III.

Fig. 24. *DAtis duabus rectis inæqualibus, de majore (GH) minori (EF) parem auferre (GI.)*

b Poſtul. 3. Accipe circino *b* intervallum minoris datæ EF, & transfer in majorem ex G in I.

PROPOSITIO IV.

Fig. 25. *SI duorum triangulorum (X, Z,) latus unum (BA) uni (FL) & alterum (CA) alteri (IL) ſit æquale, angulique (A & L) ab illis lateribus facti etiam ſint æquales, æquabuntur etiam*

etiam & baſes (BC, FI) & tota triangula (X, Z) & reliqui ad baſim anguli (B, F, & C, I) qui lateribus æqualibus opponuntur.

Nam ſi intelligamus triangulum Z triangulo X ſuperponi, latera LF, LI perfectè congruent *a* ſibi æqualibus lateribus AB, AC, ſicut puncta tria L, F, I, cadant ſuper tria puncta A, B, C, ergo tum etiam baſis FI tota cadet ſupra totam baſim BC: Sed & anguli F, B, itemque I, C, totaque triangula ſibi mutuo tunc congruent. Omnia igitur per 7. ax. æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum. a *Per ax.* 8.

Scholium.

Similiter è ratiocinio theorema ſequens, cujus mox erit uſus, licebit demonſtrare. Fig. 23.

Si duorum triangulorum X, Z, latera BC, FI æqualia fuerint, & anguli illis lateribus adjacentes, nimirum B & C ipſis F & I fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipſa, æqualia erunt.

Quoniam enim anguli B & C æquantur angulis F, & I, ſi latus FI imponas lateri ſibi æquali BC, illi d *congruet. Tum verò ob æqualitatem angulorum F, B, & I, C, etiam* e *FL cadet ſupra BA, & IL ſupra CA. Ergo etiam punctum L, incidet in punctum A, (ſi enim caderet extra A, latera FL, IL, non inciderent in latera BA, CA) Ergo omnia ſunt per axioma 7. æqualia.* d *Per ax.* 8. e *Per ax.* 8.

PROPOSITIO V.

Fig. 26.

TRianguli Iſoſcelis ſeu æqui cruris ad baſim anguli (A, C) æquales ſunt.

Intelligatur triangulum A B C bis poſitum, ſed ſitu converſo *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis A B C, *c b a*, ex hypotheſi æquale eſt latus A B, lateri *c b*, & latus C B lateri *a b*, & angulus B angulo *b*; etiam *b* ad baſim angulus A angulo *c* æqualis erit. Quod erat demonſtrandum, iidem enim ſunt anguli C &c.

b Per 4. l. 1.

Corollarium.

ÆQuilaterum ergo triangulum etiam æquiangulum eſt.

PROPOSITIO VI.

Fig. 26.

SI in triangulo (A B C) duo anguli (A & C) æquales fuerint, etiam latera (A B, C B) iis oppoſita, æqualia erunt.

Intelligatur triangulum ABC bis poſitum, ſed ſitu converſo *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis ABC, *c b a*, æquatur latus unum A C, uni lateri *c a*, & angulus

lus A angulo *c*, & angulus C angulo *a*; etiam reliqua omnia *c* erunt æqualia, ac proinde latus A B æquabitur lateri *cb*; quod erat demonſtrandum, eædem enim ſunt lineæ C B & *cb*. c *Per Schol. prop. 4.*

Corollarium.

ÆQuiangulum ergo triangulum etiam æquilaterum eſt.

PROPOSITIO VII.

E St propter 8, quæ ſine illâ ſeorſim propoſita demonſtrabitur.

PROPOSITIO VIII.

SI duo triangula habuerint omnia latera ſibi mutuo æqualia (A C ipſi E F; C B ipſi F I; A B ipſi E I;) etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppoſitos habebunt æquales (C ipſi F; A ipſi E; B ipſi I.) Fig. 27.

Ponatur enim latus A B ſupra ſibi æquale E I. Tum verò punctum C vel incidet in punctum F, vel non. Si incidat in F, tota triangula congruent, ac proinde omnes anguli *a* æquales erunt. a *Per ax. 7.*

Si C, cadat extra F, ducatur F C. Quo- Fig. 28.

 niam

niam per hypotheſim latera E F, A C æquantur, erit *b* angulus E F C par angulo E C F., ergo I F C major erit, quàm E C F, ergo I F C multò major erit, quàm I C F. Rurſum, quia per hypotheſim I F, B C, æquantur, erit I F C *c* par I C F. Ergo IFC & multò major eſt quàm I C F, & æqualis, quod eſt impoſſibile. Ergo C non cadit extra F. Ergo &c.

b *Per* 5. *l.* 1.

c *Per* 5. *l.* 1.

Plures caſus, quos hoc theorema admittit, conſulto prætermiſi, ne tyrones fatigarem. Neque verò difficulter eorum demonſtratio ex demonſtratione jam poſitâ elicietur.

PROPOSITIO IX.

Fig. 29.

D*Atum angulum rectilineum* (*I A L*) *bifariam ſecare.*

Ex lateribus anguli accipe circino æquales A B, A C; centris B ac C deſcribe duos æquales circulos ſe ſecantes in F, ducaturque recta F A. Hæc angulum biſecabit.

Ducatur enim B F, C F; triangula F A B, F A C ſunt ſibi mutuo æquilatera; nam latera A B, A C ex conſtitutione æqualia ſunt, & latera B F, C F, quia æqualium circulorum ſemidiametri, etiam æquan-

quantur; & A F utrique triangulo commune eſt. Ergo anguli B A F, C A F a æquales ſunt. Biſectus eſt ergo datus angulus I A L. quod erat faciendum. a Per 8. l. 1.

Corollarium.

HInc patet, quomodo angulus ſecari poſſit in æquales angulos 4. 8. 16. &c., ſingulas nimirum partes iterum biſecando.

Scholium.

MEthodum ſecandi angulos in æquales quotcunque, circino & regulâ hactenus nemo docuit. Ex Pappo tamen & Archimede habemus curvas quaſdam lineas, quadratricem videlicet & ſpiralem, quarum adminiculo id obtinetur. Anguli triſectio perficitur à Pappo l. 4. prop. 31. præſidio hyperboles, quod etiam obtineri poteſt ope parabolæ, vel conchoidis.

Mechanicè datum angulum in quotcumque ſecabis æquales angulos, ſi ex anguli vertice A tanquam centro intra anguli crura arcum deſcribas, eumque dividas in quot placuerit æquas partes; rectæ enim ex A per diviſionum puncta emiſſæ, angulum ſecabunt in partes totidem æquales. Fig. 30.

PROPOSITIO XX.

D*Atam rectam finitam (A B) ſecare bifariam.* Fig. 31.

Super datâ A B fac triangulum æquilaterum a A G B. Angulum ejus G b biſeca per rectam G C. Eadem biſecabit rectam A B datam.

a Per 1.l.1.
b Per præced.

Nam in triangulis X, Z, latus C G eſt commune, & per conſtructionem G B, G A æqualia, anguliq; iis contenti A G C, B G C æquales. Ergo baſes A C, B C, c æquantur. Biſecta eſt ergo data A B. Quod erat faciendum.

c Per 4.l.1.

Pro praxi ſatis erit centris A & B duos æquales circulos deſcribere, ſe ſecantes in G & L, ac ducere rectam G L.

PROPOSITIO XI.

Fig. 32.

EX dato puncto (A) in datâ rectâ (L I) perpendicularem excitare.

Circino cape æquales A C, A F. Centris C, & F deſcribe duos æquales circulos ſe ſecantes in B. Ex B ad A ducta recta erit perpendicularis.

Ducantur enim C B, F B. Triangula X, & Z, ſibi mutuo æquilatera ſunt. Ergo anguli C A B, F A B a æquales. Ergo B A b perpendicularis eſt. Ex dato igitur puncto &c. Quod erat faciendum.

a Per 8.l.1.
b Per defin. 14.

Præ-

Praxis tam hujus quàm ſequentis expeditur facillimè præſidio normæ.

PROPOSITIO XII.

EX dato extra rectam infinitam (LQ) puncto (A) perpendicularem ducere. Fig. 33.

Centro A deſcribe circulum, qui ſecet datam L Q in C & I. Rectam C I biſeca *c* rectâ A B. Ea erit perpendicularis. c Per 10. l. 1.

Ducantur enim AC, AI. Quoniam per conſtructionem triangula X & Z ſunt mutuò æquilatera; erunt anguli *d* C B A, I B A æquales. Ergo A B perpendicularis *e* eſt. Ex dato igitur puncto &c. Quod erat faciendum. d Per. 8. l. e. Per def. 14.

PROPOSITIO XIII.

REcta (B A) ſuper rectam (CF) conſiſtens aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales. Fig. 34.

Nam ſi B A inſiſtat perpendiculariter, erunt per def. 14. anguli B A C, B A F, utrimque recti. Si vero B A inſiſtat obliquè, excitetur *a* perpendicularis A L. Quia tum anguli inæquales C A B, F A B eundem locum occupant, quem duo re- a Per 11. l. 1.

ĉti CAL, LAF, ac proinde iis congruunt, erunt *b* his illi æquales. Quod erat demonſtrandum.

b Per ax. 7.

Corollaria.

1. EOdem modo demonſtrabitur, ſi plures rectæ, quàm una, eidem rectæ inſiſtant, angulos effici duobus rectis æquales.

Fig. 37. 2. Duæ rectæ ſe invicem ſecantes BAC, F A L efficiunt angulos, quatuor rectis æquales. Patet ex propos.

Fig. 36. 3. Omnes anguli circa unum punctum conſtituti conficiunt quatuor rectos. Patet ex Corol. 2., ſunt enim quatuor recti in plures partes ſecti.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 35. *SI duæ rectæ (XR, ZR) ad idem utrimque punctum rectæ QR faciant angulos (XRQ, ZRQ) duobus rectis æquales; (XR, ZR) unam rectam efficient.*

Si negas, faciant XR, BR unam rectàm. Ergo anguli XRQ, QRB *b* conficient duos rectos, quod *c* eſt abſurdum, cùm ex hyp. XRQ, ZRQ duos rectos efficiant.

b Per 13. l. 1.
c Contra ax. 9.

PRO-

PROPOSITIO XV.

SI duæ rectæ (BC, FL) ſe ſecuerint in Fig. 37.
(A,) erunt anguli ad verticem (A) oppoſiti æquales.

Nimirum LAB ipſi CAF, & BAF ipſi LAC. Nam quia BA inſiſtit rectæ LF, erunt LAB, FAB, *a* pares duobus rectis. Et quia FA inſiſtit rectæ BC, erunt *b* quoque FAC, FAB, pares duobus rectis. Ergo *c* duo ſimul LAB, FAB æquantur duobus ſimul CAF, FAB. Ablato igitur communi FAB, remanent *d* æquales LAB, CAF: Eodem modo oſtendam æquales eſſe BAF, LAC.

a *Per* 13. *l.* 1.
b *Per eand.*
c *Per ax.* 1.
d *Per ax.* 3.

PROPOSITIO XVI. XVII.

COntinentur in prop. 32. Neque ante illam adhibentur.

PROPOSITIO XVIII.

IN omni triangulo angulus (A) major eſt, Fig. 38.
qui majori lateri (BO) opponitur: (B) minor, qui minori (AO.)

Nequit A, eſſe par B, aliàs *a* latera BO, a *Per* 6. *l.* 1.

A O æquarentur contra hypotheſim. Nequit etiam A minor eſſe quàm B. Nam ſi A minor eſt, B major, poterit intra angulum B per rectam B F fieri angulus A B F æqualis A. Tum vero per 6. æquales erunt B F, A F, & ſi addas utrique, O F, erunt B F, F O æquales A O. Sed A O per hyp. minor eſt quàm B O. Ergo etiam B F, F O minores ſunt quàm B O, quod repugnat definitioni lineæ rectæ, quæ eſt omnium breviſſima. Angulus igitur A, nec minor eſt angulo B, nec æqualis. Ergo major. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 38. *In triangulo latus (B O) majus eſt, quod opponitur majori (A) angulo: (A O) minus, quod minori (B.)*

Eſt converſa prioris. B O non eſt minus quàm A O, aliàs per 18. angulus A eſſet minor angulo B contra hyp. Neque etiam B O æquale eſt A O, aliàs per 5. anguli A, B, æquarentur, rurſus contra hyp. Ergo B O majus eſt quàm A O. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XX.

OMnis trianguli duo quælibet latera reliquo ſunt majora.

Eſt Archimedi inſtar axiomatis; immediatè ſiquidem patet ex definitione Archimedeâ lineæ rectæ, quam vide ſupra in definitionibus.

PROPOSITIO XXI.

SI à terminis unius lateris (A B) intra triangulum duæ rectæ junguntur (A O, BO) hæ lateribus trianguli (A C, B C) minores ſunt, majorem verò angulum (A O B) comprehendunt. Fig. 39.

1. Pars. Produc A O in F. AC, C F ſunt a majores, quàm A F. Additâ ergo communi F B, erunt A C, C B majores quàm A F, F B: Rurſum O F, B F ſunt b majores, quàm O B. Additâ ergo communi A O, erunt A F, F B majores, quàm A O, O B. Ergo A C, C B ſunt multò majores, quàm A O, O B.

a Per 20. l. 1.

b Per eand.

2. Pars demonſtrabitur in Coroll. 2. partis primæ prop. 32. Eâ interim non utemur.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Fig. 40. *EX datis tribus rectis (BO, LB, LO) quarum duæ quælibet reliquâ ſint majores, triangulum conſtituere.*

Aſſumatur datarum una BL, atque unâ ejus extremitate B acceptâ pro centro, intervallo alterius datæ BO deſcribatur arcus.

Deinde acceptâ pro centro extremitate alterâ L, intervallo tertiæ LO deſcribatur arcus priorem ſecans in O: ducanturque rectæ BO, LO. Dico factum.

Demonſtratio patet ex conſtructione.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 40. *AD datum in rectâ punctum (B) angulum efficere æqualem dato (A.)*

Ducatur utcunque CF ſecans latera dati anguli A. In datâ rectâ ex B accipe BL parem AF. Centro B, intervallo AC deſcribe circulum: item alium centro L, intervallo FC, qui priorem ſecet in O. Ex O ad B & L duc rectas.

Erit angulus LBO par dato A.

Nam

Nam per conſtr. triangula ſibi mutuo ſunt æquilatera. Ergo per 8. anguli B & A æquales.

Scholium.

IN gratiam tyronum viſum eſt hic non nulla ad praxim angulorum neceſſaria proponere.

Anguli menſura eſt circuli peripheria, quæ ex A vertice anguli tanquam centro deſcribitur, ut patebit ex prop. ultimâ l. 6. Fig. 41.

Itaque quot grodus continebit arcus BC inter anguli BAC crura interceptus, tot graduum dicetur eſſe angulus BAC. Et quoniam rectum angulum BAF metitur quadrans peripheriæ BF, gradus 90. continens, dicetur rectus angulus eſſe graduum 90. Similiter quia duos rectos menſurat dimidia circumferentia in 180. gradus ſecta, & quatuor rectos circumferentia tota ſecta in gradus 360., dicentur duo recti efficere gradus 180. & quatuor recti gradus 360. His prænotatis praxes angulorum ſunt.

1. *Ad datum in rectâ punctum B. angulum ſtatuere parem dato A. Ex A dati anguli vertice tanquam centro inter latera arcum deſcribe CF. Centro B puncto dato, deſcribe eodem intervallo arcum LZ: ex quo aufer LO parem CF., per B & O duc rectam: erit LBO par dato A.* Fig. 42.

2. *Dati anguli OPQ gradus examinare. Fit hoc facillimè per ſemicirculum corneum tranſparentem, in 180. gradus diviſum: Centrum ſemicirculi pone ſupra P verticem anguli, & ſemicirculi radium PL ſupra anguli latus PQ. Arcus LO in-* Fig. 43.

inter anguli crura interceptus oſtendet, quot graduum ſit datus angulus.

3. *Angulum conſtruere datos continentem gradus 42. Duc rectam X Q, in quâ ſigna punctum P. Super P pone ſemicirculi centrum ejuſque ſemidiametrum P L ſupra P Q. Ab L numera gradus 42. uſque in O. per O ex P ducta recta dabit angulum O P L graduum 42.*

Horum omnium demonſtratio pendet ex ultimâ prop. lib. 6.

PROPOSITIO XXIV. & XXV.

Fig. 44. *SI duo triangula (B A C, B A F) duo latera (B A, A C) duobus (B A, A F,) alterum alteri, æqualia habuerint; unum vero triangulum angulum illis lateribus contentum (B A F) majorem habeat altero (B A C;) habebit quoque baſim B F majorem baſi (B C.)*

Et ſi baſim majorem habuerit, habebit angulum majorem.

Centro A deſcribe per C circulum; is tranſibit per F, quia AC, AF ponuntur æquales. Ergo AF cadit ſupra C. Junge CF. Angulus B C F eſt major angulo A C F; hoc eſt per 5. angulo A F C, hoc eſt multò major angulo B F C. Ergo *a* B F oppoſita majori angulo B C F major eſt, quàm BC. oppoſita minori B F C.

a Per 19. *l.* 1.

2. Pars

2. Pars patet ex primâ parte & ex prop. 4.

PROPOSITIO XXVI.

SI duo triangula (XZ) duos angulos duobus æquales habuerint alterum alteri (B ipſi F & C ipſi I,) & unum latus uni lateri æquale, vel quod inter æquales angulos exiſtit (ut BC, FI) vel quod uni æqualium angulorum opponitur (ut AC, LI) reliqua omnia erunt æqualia. Fig. 25.

Ponantur primò æqualia eſſe latera BC FI, inter æquales angulos poſita: tum verò reliqua etiam omnia æqualia eſſe demonſtratum eſt in ſcholio prop. 4.

Ponantur deinde, latera AC, LI æqualibus angulis B & F oppoſita, eſſe æqualia. Quia anguli B C per hyp. æquantur angulis F, I, etiam reliqui A, L, æquales erunt per coroll. 8. p. 32. quæ ab hac non dependet. Ergo per primam partem omnia reliqua ſunt æqualia.

PROPOSITIO XXVII.

SI duas rectas (AB, CF) parallelas ſecuerit recta GO: erunt 1. æquales alterni anguli Fig. 45.

guli (RLO, QOL, item BLO, COL) 2. externus (GLB) æqualis interno ad eandem partem (LOF) (item GLR ipſi LOC.) 3. Duo ad eandem partem interni ſimul (ALO, COL) æquales duobus rectis: item duo BLO, FOL duobus rectis æquales.

Fig. 46. 1. Pars. Ex O & L duc perpendiculares OR, LQ: erunt *a* hæ ad utramque parallelam AB, CF perpendiculares, & per def. 36. inter ſe æquales. Æquales quoque *b* ex parallelis auferent partes RL, QO. Ergo triangula, X, Z, ſibi mutuo æquilatera ſunt. Ergo *c* anguli RLO, QOL alterni æqualibus lateribus RO, QL oppoſiti, ſunt æquales. Quod erat primum. Ex quo patet etiam alternos reliquos BLO, COL æquales eſſe. Nam quia tam BLO, ALO, quàm COL, FOL æquantur *d* duobus rectis; erunt BLO, ALO æquales ipſis COL, FOL. Ablatis ergo æqualibus RLO, FOL, erunt reliqui BLO, COL etiam æquales.

a Per ax. 11.
b Per ax. 12.
c Per 8. *l.* 1.
d Per 13. *l.* 1.

2. Pars. GLB æquatur ad verticem *e* oppoſito RLO. Sed RLO æquatur per 1. partem LOF. Ergo GLB externus æquatur interno LOF: quod erat alterum.

e Per 15. *l.* 1.

3. Pars. ALO per 1. partem æquatur FOL.

FOL. Atqui FOL cum COL *f* facit duos rectos. Ergo etiam ALO cum COL facit duos rectos. Quod erat tertium. *f Per 13. l. 1.*

PROPOSITIO XXVIII.

SI duas rectas (AB, CF) ſecans recta (GO) alternos angulos (ALO, FOL) æquales fecerit, erunt (AB, CF) parallelæ. *Fig. 47.*

Si negas, ſit ergo alia XLZ per punctum L ad CF parallela.

Ergo *a* angulus XLO par eſt alterno FOL; Quod fieri non poteſt, cùm per hyp. ALO par ſit eidem FOL. *a per præc.*

PROPOSITIO XXIX.

SI duas rectas (AB, CF) ſecans recta (GO) fecerit externum (GLB) æqualem oppoſito interno (LOF) vel duos ad eaſdem partes internos ALO, COL pares duobus rectis, erunt (AB, CF) parallelæ. *Fig. 45. Fig. 46.*

Per 15. GLB æquatur ALO oppoſito ad verticem. Sed per hyp. GLB æquatur LOF. Ergo etiam ALO æquatur ſibi alterno LOF. Ergo *b* AB, CF ſunt parallelæ. *b Per præc.*

Deinde COL cum FOL facit duos rectos. Sed per hyp. idem COL etiam cum ALO facit duos rectos. Ergo ALO, FOL alterni æquales ſunt. Ergo rurſum
c *Per præc.* AB, CF *c* ſunt parallelæ.

Corollarium.

EX ſecundâ parte patet omne rectangulum eſſe parallelogrammum.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 45. *SI duæ rectæ (AB, CF) ſint parallelæ ad eandem rectam (DN) erunt inter ſe parallelæ.*

Patet per ſe, & ex præcedentibus. Nam
a Per 27. l. 1. ſi omnes ſecentur à rectâ GO, erit *a* angulus externus GLB par interno LDN, eſt
b Per 27. l. 1. verò LDN externus *b* reſpectu DOF, ac proinde æqualis. Ergo etiam GLB par
c Per. præc. eſt LOF. Ergo AB, CF ſunt *c* parallelæ.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 48. *PEr datum punctum (A) parallelam ducere ad rectam datam (CF.)*

a Per 23. l. 1. Ex A ducatur utcunque AL, ſecans datam FC. Ad punctum A fiat *a* angulus

LAS

L A S par angulo A L F. Erit A S parallela ad C E, ut patet ex 28., cùm alterni anguli S A L, F L A ſint æquales.

Praxis. Ductâ AL, centro L deſcribe arcum I Q, & centro A eodem intervallo arcum O X; ex quo aufer O B parem I Q. Per A & B ducta recta erit parallela.

Demonſtratio pendet ex 29. l. 3.

Aliter. Centro quopiam P deſcribe circulum qui tranſeat per datum punctum A, & ſecet datam C F in Q & O. Arcui Q A accipe æqualem ON, recta A N erit parallela. Fig. 49.

Demonſtratio pendet ex 29. lib. 3. & ex 28. hujus.

Scholium.

Demonſtrata jam igitur eſt parallelarum theoria independenter ab axiomate, quod Euclides, ejuſque interpretes aſſumunt minùs rectè; cùm non ſit axioma, ſed theorema, cujus veritas non magis per ſe appareat, quàm ipſius 29. propoſitionis. Quia tamen deinceps ſæpius adhibebitur, id hoc loco jam facilè ex præmiſſis demonſtrabimus.

Theorema.

SI recta M A incidens in rectas B C, A D, faciat angulos internos ad eaſdem partes B A D, A B C, duobus rectis minores, rectæ B C, A D concurrent versùs eam partem, quam ſpectant anguli duobus rectis minores. Fig. 50.

Quoniam per hyp. C B A, D A B duobus rectis ſunt minores; fiant C B A, X A B duobus rectis æqua-

a Per 29. l. 1. quales: Eruntque BC, AX a parallelæ. Aſſumo tanquam axioma per ſe notum, inter rectas AD, AX in infinitum productas duci poſſe aliquam ad AM parallelam, puta ZX, quæ major ſit quàm AB. Accipiatur ipſi ZX æqualis AR, & junge ZR. Quoniam AR, ZX ſunt parallelæ, b Per 27. l. 1. erunt b alterni XZA, RAZ æquales. Sunt autem & latera XZ, ZA æqualia lateribus RA, AZ, per c Per.4 l. 1. conſtr. Ergo etiam c anguli RZA, XAZ æquales d Per 28. l. 1. ſunt. Ergo RZ, eſt d parallela ad AX. Sed etiam BC eſt paralella ad AX. Ergo RZ & BC e Per 30. l. 1. ſunt e parallelæ. Eſt igitur BC & parallela ad RZ, & incluſa triangulo ARZ. Ergo cùm produci in infinitum poſſit, neceſſariò occurret aliquando rectæ AZ. nam neque evadere poteſt per ſibi parallelam RZ, neque pertingere in A, aliàs duæ rectæ haberent commune ſegmentum. Liquet ergo propoſitum.

Demonſtratio Clavii eſt à parallelis independens, ſed prolixiſſima & multùm operoſa: Procli nititur hoc principio, quòd recta unam parallelam ſecans, etiam alteram ſectura ſit, ſi producatur. Verùm hoc per ſe notum non eſt, ob rationem datam ad def. 36.

Corollarium.

Fig. 50. Hinc patet rectas non parallelas concurrere, de quo dubitari poterat ob rationem allatam ad def. 36. Sint rectæ non parallelæ BC, AZ. Duc AX parallelam ad BC, erunt XAB, CBA duobus rectis a Per 27. l. 1. a æquales. Ergo ZAB, CBA ſunt duobus rectis minores. Ergo per theorema jam demonſtratum BC, AZ concurrunt.

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

PARS I.

OMnis trianguli externus quivis angulus (F BC) duobus internis oppoſitis (A & C) æqualis eſt. Fig. 51.

Per B duc [a] BL parallelam ad AC. Quia duas parallelas BL, AC ſecat FA, erit externus angulus FBL interno A [b] æqualis. Et quia eaſdem parallelas BL, AC ſecat etiam recta BC, erit LBC ſibi alterno C [c] æqualis. Ergo totus FBC æquatur utrique ſimul A & C. Quod erat demonſtrandum.

a Per 31. l. 1.
b Per 27. l. 1.
c Per eand.

Corollaria.

1. EXternus angulus (FBC) quolibet internorum oppoſitorum, A, vel, C, major eſt. Fig. 51.

2. Angulorum (C & AOB) eandem baſim (AB) habentium, major eſt (AOB) qui intra cadit. Fig. 39.

Producatur enim AO, in F. AOB per hanc major eſt quàm OFB; & OFB per hanc eandem major eſt quàm C. Ergo AOB multò major eſt quàm C.

3. Si ab uno puncto (A) in unam rectam (BC) Fig. 55.

(BC) incidant duæ rectæ, altera (AO) obliquè, perpendiculariter verò altera (AF) hæc cadet versùs partes acuti anguli AOB. Cadat enim, ſi fieri poteſt, versùs obtuſum AOC, puta in Q. Igitur acutus AOB erit externus, reſpectu recti AQB, ac proinde illo major per coroll. 1, quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO XXXII.

PARS II.

Omnis trianguli tres ſimul anguli duobus rectis ſunt æquales.

At proinde conficiunt gradus 180.

Fig. 52. Produc unum latus AB in F. Externus angulus FBC duobus internis oppoſitis A & C æqualis *a* eſt. Atqui *b* FBC cum CBA efficit duos rectos. Ergo etiam duo A & C cum eodem CBA efficiunt duos rectos.

a Per 1 partem hujus.
b Per 13. l. 1.

Fig. 53. Aliter. Ducatur HM parallela lateri AC. Anguli alterni tam O, A, quàm N, C, æquales *c* ſunt. Sed O, Q, N, conficiunt *d* duos rectos. Ergo etiam A, C, Q duos rectos conficiunt. Quod erat demonſtrandum.

c Per 27. l. 1.
d Coroll. 1. p. 13. l. 1.

Co-

Corollaria.

4. TRes ſimul anguli cujuſvis trianguli æquales ſunt tribus ſimul cujuſcunque alterius.

5. Si in triangulo unus rectus eſt, reliqui ſunt acuti.

6. Si in triangulo unus eſt rectus, reliqui duo ſimul etiam unum rectum conficiunt.

7. In triangulo angulus, qui æquatur duobus reliquis, rectus eſt.

8. Cùm ſcitur quot graduum ſit unus angulus, ſcitur etiam quot gradus faciant duo reliqui ſimul. Et cùm ſcitur quot gradus faciant duo anguli, aut eorum ſumma, ſcitur etiam quot gradus efficiat tertius.

9. Cùm in uno triangulo duo anguli aut ſinguli, aut ſimul, æquales ſunt duobus angulis aut ſingulis, aut ſimul, in altero triangulo, etiam tertius tertio æqualis erit.

10. Cùm duo triangula unum angulum æqualem habent, etiam reliquorum ſummæ æquantur.

11. Cùm in Iſoſcele angulus æquis cruribus contentus eſt rectus, reliqui ad baſim ſunt ſemirecti. Et Iſoſcelis ad baſim anguli ſemper ſunt acuti.

12. Trianguli æquilateri angulus facit

duas tertias unius recti. Facit enim tertiam partem duorum rectorum. Ergo duas tertias unius.

Fig. 54. 13. Hinc anguli recti (B A C) facillima triſectio, ſi ſuper AC fiat triangulum æquilaterum Z. Nam cùm F A C ſint duæ tertiæ unius recti, erit BAF recti una tertia.

Fig. 55. 14. Perpendicularis AF eſt breviſſima omnium, quæ ex puncto (A) ad rectam aliquam duci poſſunt. Quoniam enim angulus F rectus eſt, erit per coroll. 5. A O F acutus. Ergo *f* A F minor quàm A O quælibet.

f Per 19. l. 1.

15. Ex uno puncto ad unam rectam tantùm una perpendicularis cadit. Patet ex coroll. præced.

Scholium.

Hujus pulcherrimi fæcundiſſimique theorematis, cujus per Matheſim univerſam uſus prope immenſus, inventor eſt Pythagoras, teſte Eudemo veteri Geometrâ. Frequentiſſimè ejuſdem meminit Ariſtoteles, qui illud etiam exemplum ſtatuit perfectiſſimæ demonſtrationis. Sed quemadmodum ex hac propoſitione jam didicimus, quot rectis angulis ejus anguli æquivaleant, ita ejuſdem beneficio cujuſlibet figuræ rectilineæ ſive interni, ſive externi anguli, quot rectos conficiant, præclarè innoteſcet tribus ſequentibus theorematibus.

Theo-

Theorema 1.

OMnis quadranguli quatuor ſimul anguli efficiunt quatuor rectos. *Fig.* 46.

Nam ſi per oppoſitos angulos ducas rectam B F, hæc quadrangulum in duo triangula ſecabit, quorum anguli ſimul conficiunt a *rectos quatuor.* a *Per* 32. *l.* 1.

Theorema 2.

OMnes ſimul anguli cujuſcunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demtis quatuor, quot ſunt látera figuræ.

Ex quovis puncto A intra figuram, ducantur ad omnes figuræ angulos rectæ, quæ ſecabunt figuram in tot triangula, quot habet latera. Quare cùm ſingula triangula a *conficiant duos rectos, omnia ſimul conficient bis tot rectos, quot ſunt latera. Sed anguli circa punctum A,* b *conficiunt quatuor rectos. Ergo ſi ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa A, anguli reliqui, qui componunt angulos figuræ, conficient bis tot rectos, demtis quatuor, quot ſunt latera figuræ.* *Fig.* 57. a *Per* 32. *l.* 1. b *Coroll.* 3. *p.* 13. *l.* 1.

Hinc patet omnes ejuſdem ſpeciei rectilineas figuras æquales habere angulorum ſummas; Quod admiratione dignum eſt.

Praxis. Duplica denominatorem figuræ: à producto aufer 4., *reſtabunt anguli recti, quos conficiunt anguli interni figuræ.*

Theorema 3.

OMnes ſimul externi anguli cujuſcunque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos. *Fig.* 58.

 Nam

Nam ſinguli figuræ interni anguli cum ſingulis
c Per 13. l. 1. *externis conficiunt duos c rectos. Ergo interni ſimul omnes cum omnibus ſimul externis conficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ. Sed (ut in preced. oſtendimus) interni ſimul omnes etiam cum quatuor rectis efficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ. Ergo externi anguli, & quatuor recti æquantur.*

Mira ſanè hæc figurarum rectilinearum proprietas eſt: ex quâ illud etiam conſequitur, omnes cujuſcunque ſpeciei rectilineas figuras æquales habere externorum angulorum ſummas. Itaque trianguli alicujus tres externi anguli æquales ſunt mile externis angulis figuræ millelateræ; Quæ prorſus admiratione ſunt digna.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 59. *SI duas rectas æquales & parallelas (AB, CF) jungant duæ aliæ (AC, BF) erunt etiam illæ æquales parallelæ.*

Parallelas A B, C F ſecet A F. Erunt in triangulis Q, R alterni anguli B A F, C F A
a Per 27. l. 1. *a* æquales. Ponitur autem latus AB æquale lateri CF, & AF utrique triangulo eſt commune. Ergo *b* baſes B F, A C æquantur.
b Per 4 l. 1. Quod erat primum. Et anguli ad baſim AFB, FAC ſunt æquales: ac proinde A F incidens in rectas AC, BF facit alternos A
c Per 28. l. 1. F B, F A C æquales. Ergo *c* AC, BF ſunt etiam parallelæ. Quod erat alterum.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

PArallelogrammi oppoſita latera & anguli æquantur, ipſumque à diametro biſecatur. Fig. 59.

Quoniam AB, CF ſunt *a* parallelæ, in eaſque incidit AF, erunt alterni BAF, CF A *b* æquales. Item quia AC, BF ſunt *c* parallelæ, in eaſque incidit AF, erunt *d* alterni CAF, BFA æquales. Ergo totus BAC toti BFC æqualis eſt. Eodem modo oſtendam B & C æquales eſſe. Quod erat primum.

a *Per defin.* 35

b *Per* 27. *l.* 1.

c *Per def.* 35.

d *Per* 27. *l.* 1.

Quia verò jam oſtendi triangula Q R, quæ unum latus AF commune habent, etiam angulos lateri A F adjacentes habere æquales, nimirum BAF ipſi CFA, & CA F ipſi B F A. Erunt *e* etiam latera A B ipſi F C, & B F ipſi C A, æqualia, itemque ipſa triangula.

e *Per* 25. *l.* 1.

Scholium,

PArtim ex hoc theoremate, partim ex definitione libro 2. præmittendâ, facilè elicitur dimenſio parallelogrammi rectanguli. Illius area producitur ex multiplicatione duorum laterum contiguorum A F, A C. ſit ex. gr. A F pedum 8, A C, 4. Duc 8. in 4. proveniunt 32. pedes quadrati pro areâ rectanguli. Fig. 64.

Quadrata vero area habetur ex uno latere (F I) per ſe ipſum multiplicato: ut ſi latus (F I) ſit 5. pedum; Fig. 61.

dum; duc 5. in ſe, proveniunt. 25. pedes quadrati pro areâ quadrati.

Demonſtratio ex hac prop. patet ductis per laterum diviſiones parallelis.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

Fig. 61. *PArallelogramma ſuper baſi eâdem (AB) vel æquali, & inter eaſdem parallelas (CQ, AX) conſtituta, ſunt æqualia.*

a Per def. 35. b Per 27. l. 1. c Per 34. l. 1. d Per eand. e Per 4. l. 1.

Quia AL, BQ *a* ſunt parallelæ, eaſque ſeçat CQ; erit *b* externus CLA par interno FQB. Deinde quia tam CF quàm LQ æquantur *c* eidem AB, erunt CF, LQ, æquales. Adde utriſque FL; erunt totæ CL, FQ æquales. Inſuper & AL, BQ *d* æquales ſunt. Triangula igitur CLA, FQB æqualia *e* ſunt. Ergo ablato communi FOL, plana FOAC, QBOL remanent æqualia. Quibus utriſque adde planum AOB, fiunt parallelogramma tota ACFB, ALQB æqualia. Quod erat demonſtrandum.

Hæc propoſitio fiet univerſalis p. 1. lib. 6. Obſervent hic tyrones, quamvis parallelogramma inter eaſdem parallelas ſine fine productas in infinitam longitudinem extendantur ex eâdem baſi, AB, ſemper tamen manere æqualia ex vi demonſtrationis jam datæ.

Scho-

Scholium.

EX hoc theoremate habetur dimenſio parallelogrammi cujuſcumque. Illius igitur area producitur ex altitudine QX ſeu CA ductâ in baſim AB. Fig. 62.

Nam area rectanguli CB parallelogrammo BL æqualis ſit f *ex AC ductâ in AB. Ergo &c.* f *Per ſchol. præced.*

PROPOSITIO XXXVII. & XXXVIII.

TRiangula (ACB, AFB) ſuper baſi eâdem (AB) vel æquali inter eaſdem parallelas (CI, AZ) conſtituta, ſunt æqualia. Fig. 63.

Lateribus AC, A F duc parallelas B L, BI. Parallelogramma, ACLB, AFIB ſunt *a* æqualia. Sed horum triangula data *b* ſunt dimidia. Ergo triangula data *c* ſunt æqualia. a *Per præc.* b *Per* 34. *l.* 1. c *Per ax.* 6.

Hæc propoſitio fiet univerſalis p. 1. *l.* 6. *Idem hic tyrones notent in triangulis, quod eos notare juſſimus prop. præced. de parallelogrammis.*

PROPOSITIO XXXIX. & XL.

TRiangula æqualia (ACB, AFB) ſuper eâdem baſi (AB) vel æquali, ad eaſdem partes conſtituta, ſunt inter eaſdem parallelas (AB, CF.) Fig. 64.

Si

Si negas, ſit CL parallela ad AB, & ducatur BL. Igitur ALB æquatur *a* ACB. Sed ex hyp. etiam AFB ipſi ACB æquale eſt. Ergo ALB, & AFB æqualia ſunt, pars & totum. Quod fieri non poteſt. Igitur &c.

a *Per præc.*

PROPOSITIO XLI.

Fig. 65.

SI triangulum (AFB) ſit in iiſdem parallelis cum parallelogrammo (AL) & baſim eandem habeat (AB) vel æqualem, ipſius dimidium erit.

Duc CB. Triangula AFB, & ACB *b* æquantur. Sed *c* ACB eſt dimidum parallelogrammi AL. Ergo etiam AFB eſt dimidium AL. Quod erat demonſtrandum.

b *Per 37. & 38. l. 1.*
c *Per 34. l. 1.*

Scholium.

Fig. 65.

EX hac, & ex ſcholio prop. 35. diſcimus, aream trianguli (AFB) cujuſcunque produci ex dimidiâ altitudine FI ductâ in baſim (AB) vel ex dimidiâ baſi in altitudinem. Quare noto uno latere trianguli, & altitudine, ſive perpendiculari, quæ in latus notum ex angulo oppoſito ducitur, habetur trianguli dimenſio: ut ſi baſis AB ſit pedum 100., *altitudo FI,* 85. *multiplica baſis dimidium* 50. *per* 85., *proveniunt* 4250. *pedes quadrati pro area trianguli AFB. Porro altitudo ſive perpendicularis illa, quando area trianguli peragrari poteſt, mechanicè innoteſcit, uti latera. Si area peragrari*

ne-

equeat, invenietur geometricè altitudo per 12. *&* 13. *l.* 2. *ut in ſcholio ibidem docebimus.*

In triangulo rectangulo altitudo eſt eadem cum alterutro latere circa angulum rectum. Hujus ergo ſemiſſis ducta in latus alterum recto adjacens dabit trianguli aream.

PROPOSITIO LXII.

DAto triangulo (ACB) æquale parellelogrammum facere habens angulum parem dato (O.) Fig. 66.

Baſim AB biſeca in F. per C duc CX parallelam AB *a*. Fac *b* angulum BAL parem dato O. Duc FI parallelam AL. *c* Erit ALIF, quod quæritur.

Ducatur enim FC. Parallelogrammum AI, angulum habet LAF parem dato, O; & eſt æquale triangulo dato ACB, cùm tam *d* triangulum ACB, quàm *e* parallelogrammum AI, dupla ſint ejuſdem trianguli ACF.

a Per 31. *l.* 1.
b Per 23. *l.* 1.
c Per 31. *l.* 1.
d Per *præc.*
e Per 37. *l.* 1.

Corollarium.

DAto triangulo ACB habetur æquale rectangulum, ſi per C ducatur parallela lateri AB, & biſectâ AB in F, ex B erigatur perpendicularis BQ. Erit enim rectangulum ſub FB, & QB par triangulo ACB. Fig. 66.

PRO-

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 67. *IN parallelogrammo (B L) complementa (B O, OL) eorum, quæ circa diametrum exiſtunt (RF & CS), ſunt æqualia.*

Si per diametri AQ, punctum quodvis O ducatur CF parallela lateri AB, & RS parallela lateri BQ; ſecatur totum BL in quatuor parallelogramma, quorum duo circa diametrum ſunt, KF, CS, duo reliqua BO, OL, ſunt horum complementa.

Ea eſſe æqualia ſic oſtenditur. Triangula ABQ, ALQ *a* æquantur, ſimiliter ARO, OCQ *b* æquantur AFO, OSQ. Ergo ſi ab æqualibus ABQ, ALQ, auferas æqualia, hinc ARO, OCQ, inde AFO, OSQ, æqualia remanent BO, & OL. Quod erat demonſtrandum.

a *Per* 34.
b *Per eand.*

PROPOSITIO XLVI.

Fig. 68. *AD datam rectam (OS) parallelogrammum conſtituere dato triangulo (V) æquale in angulo dato (X.)*

Fac *f* parallelogrammum RC dato V æquale, habens angulum ROC parem dato X, & pone latus RO in directum datæ OS. Per S duc SQ *g* parallelam OC, cui occurrat BC producta in Q. Per Q & O ducta recta

f *Per* 42. *l.* 1.
g *Per* 31. *l.* 1.

recta occurrat BR protractæ in A. Per A duc A L parallelam ad O S, cui occurrant CO, & Q S productæ in F & L, parallelogrammum OL eſt quod petitur.

Nam O L, æquatur R C *i*, hoc eſt per conſtructionem, dato triangulo V: & eſt ad datam OS, habetque angulum *k* FOS parem angulo R O C, hoc eſt per conſtr. parem dato X. i *Per præc.* k *Per* 15. *l.* 1.

PROPOSITIO XLV.

D*Ato rectilineo* (*C B A*) *æquale parallelogrammum conſtruere ad datam rectam* (*I Q*) *&* *in dato angulo* (*H.*) *Fig.* 69.

Rectilineam reſolve in triangula A, B, C, ducendo rectas F L, F I.

Ad datam IQ in angulo dato, H, fac *a* parallelogrammum IV æquale triangulo A. Tum producatur IR infinitè verſus P: & ad rectam RV in angulo VRP fac *b* parallelogrammum R Z æquale trigono B. Rurſum ad rectam SZ in angulo Z S P fac parallelogrammum S G æquale trigono C, IG eſt parallelogrammum quæſitum. a *Per* 44. *l.* 1. b *Per eand.*

Nam *c* angulus Z V R par eſt ſibi alterno IRV. Sed *d* Q V R & IRV ſunt æquales duobus rectis. Ergo etiam QVR & ZVR c *Per* 27. *l.* 1. d *Per eand.*

f Per 14. l. 1. duobus rectis æquantur. Ergo *f* QV & ZV ſunt in directum. Pari modo oſtendam QZ & GZ eſſe in directum. Ergo tota QVZG eſt una recta, & quidem parallela ad IX, cùm per conſtr. QV ſit ad IP parallela. Eſt verò etiam *g* XG parallela ad IQ

g Per 30. l. 1. cùm XG ſit parallela ad SZ, & SZ ipſi RV, & RV ipſi IQ.

h Per defin. 35. Ergo *h* IG eſt parallelogrammum: eſſe autem quale petitur patet ex conſtructione.

Scholium.

ADjungo problema utile futurum ad praxim propoſitionis 14. *l.* 2.

Fig. 70. *Dato quadrangulo BF rectangulum æquale deſcribere.*

Reſolve in triangula per rectam AC. Ex oppoſitis angulis dimitte perpendiculares BO, FI, biſeca AC in S. Ex S erige perpendicularem SL parem duabus BO, FI. Rectangulum ſub LS, & SA æquatur dato BF. Demonſtratio patet ex 41.

PROPOSITIO XLVI.

ADatâ rectâ (AB) quadratum deſcribere.

Fig. 71. Erige duas perpendiculares æquales datæ AB, nempe AC, BE, & junge CE. Dico factum.

a Per conſtr. Cùm enim anguli A & B duo ſint *a* recti,

cti, erunt *b* AC, BE parallelæ, ſunt verò *b Per 29. l. 1.*
etiam *c* æquales. Ergo CE *d* AB ſunt pa- *c Per conſtr.*
rallelæ & æquales, Ergo figura eſt paral- *d Per 33. l. 1.*
lelogramma, & æquilatera: anguli quoque
omnes ſunt recti (cùm enim A, & B ſint
e recti, etiam recti erunt oppoſiti, E, & *e Per 34. l. 1.*
C.) Ergo figura AE, eſt quadratum.

PROPOSITIO XLVII.

IN *omni triangulo* (*ABC*) *rectangulo, qua-* *Fig. 72.*
dratum lateris (*AC*) *quod recto angulo op-
ponitur, æquale eſt duobus ſimul reliquorum la-
terum* (*AB, CB*) *quadratis.*

Ducantur IC, BF, & BE parallela AF.
Si angulis IAB, FAC rectis, ac proinde
æqualibus, addatur communis BAC, erunt
toti IAC, FAB æquales. Sunt verò in
triangulis IAC, FAB etiam latera, quæ æ-
quales illos angulos continent, inter ſe
a æqualia, nempe, IA, CA, ipſis BA, FA, *a Per. defin. quadrati.*
alterum alteri: Ergo triangula IAC, FAB
b æquantur: Quæ, quia cum parallelo- *b Per 4. l. 1.*
grammis ABLI & ZAFE conſiſtunt in iiſ-
dem baſibus IA, FA, & in iiſdem paralle-
lis IA, LBC, & AF, EZB, ſunt *c* eorum di- *c Per 41. l. 1.*
midia. Ergo parallelogramma ABLI,
ZAFE, utpote æqualium dupla, erunt æ-

 qua-

qualia inter ſe. Eodem diſcurſu ductis rectis AX, BR oſtendam parallelogramma, EC, BX æqualia eſſe. Totum igitur AR utriſque IB, & BX æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

Aſſumtum fuit LBC eſſe parallelam IA, adeoque LB, BC eſſe unam rectam. Id verò patet ex 14., cùm anguli LBA, & CBA ambo recti ſint per hypotheſim.

Scholium.

HOc theorema (quod prop. 31. lib. 6. Euclides ad omnes figuras ſimiles extendit) Pythagoricum appellatur paſſim ab inventore Pythagorâ; qui, ut teſtantur Proclus, Vitruvius, aliique, Muſis victimas immolavit, quòd ſe in tam præclaro invento ab iis adjutum putaret. Ignorabat videlicet ſcientiarum Dominum, verum & unicum omnis ſapientiæ auctorem Deum; aut certè ſi cognovit, non ſicut Deum glorificavit. Frequens porrò hujus theorematis & eximius per Mathematicam totam uſus eſt; ac viam inprimis ad incommenſurabiles magnitudines, arcanum ingens Geometricæ Philoſophiæ, cognoſcendas aperit.

Quadrati latus eſſe diametro incommenſurabile, celebratiſſimum eſt apud veteres Philoſophos, Ariſtotelem præſertim & Platonem, adeò ut qui hoc Fig. 17. *neſciret, eum Plato non hominem eſſe, ſed pecudem diceret. Notitia porrò hujus myſterii duxiſſe videtur originem ex hac prop. 47. Nam cùm in quadrato angulus A rectus ſit, erit quadratum diametri*

CB

CB æquale quadratis laterum AB, AC ac proinde duplum unius. Quare cùm quadratum diametri CB ſit 2. & quadratum lateris AB, ſit unitas, erit diameter CB radix quadrata, 2. & latus AB radix quadrata unitatis, ſive ipſa unitas, quarum proportio (ut ſuo loco demonſtrabitur) numeris explicari nequit, ac proinde incommenſurabiles ſunt.

Atque hoc vel unico argumento, tametſi cætera omnia deficerent, evidentiſſimè conficitur, magnitudines ex definito punctorum numero componi non poſſe; aliàs enim nullæ eſſent incommenſurabiles, omnium quippe menſura communis eſſet punctum.

His ſubjungo tria problemata ex eâdem propoſitione deducta, quorum uſus frequentior.

Problema I.

D*Atis quotcunque quadratis, unum omnibus æquale conſtruere.* Fig. 73.

Dentur quadrata tria, quorum latera ſint AB, BC, CE. Fac angulum rectum FBZ infinita habentem latera, in eaque transfer BA, & BC, & junge AC, erit ex AC quadratum æquale a *quadratis AB, BC, Tum AC transfer ex B in X, & CE tertium latus datum transfer ex B in E, & junge EX, erit quadratum ex EX æquale* b *quadratis ex EB (ſeu EC) & ex BX, hoc eſt æquale tribus datis quadratis ex AB, ex BC, ex CE.*

a Per 47. l. 1.

b Per eand.

Problema 2.

Fig. 74. *DAtis duobus rectis inæqualibus AB, BC, exhibere quadratum, quo quadratum majoris AB, excedit quadratum minoris BC.*

Centro B intervallo BA deſcribe circulum. Ex C erige perpendicularem CE, occurrentem peripheriæ in E. Quadratum ex CE eſt exceſſus quæſitus.

Ducatur enim BE, quadratum BE, hoc eſt AB, æquatur c quadrato BC, & quadrato CE. Ergo &c.

c Per 47. l. 1.

Problema. 3.

MOtis duobus quibuſcunque lateribus trigoni rectanguli, reliquum invenire.

Fig. 75. *Latera rectum angulum ambientia ſint AC, AB, hoc* 6. *pedum, illud* 8. *Oporteat invenire quot pedum ſit CB recto oppoſitum. Duc* 6. & 8. *in ſe ipſa: orientur laterum quadrata* 36. & 64. *quorum ſumma eſt* 100. *Radix quadrata* 100. *nempe* 10. *dat pedes lateris BC quæſiti. Demonſtr. patet ex* 47. *Nam ſumma quadratorum BA & AC æquatur quadrato BC. Ergo horum ſummæ radix eadem eſt cum radice ſeu latere BC.*

Nota ſint deinde latera AB, BC, hoc 10. *pedum, illud* 6. *Oporteat invenire AC. Lateris AB quadratum* 36. *aufer ex* 100. *quadrato lateris BC; Reſiduum* 64. *erit quadratum lateris AC. Radix ergo* 64. (*nempe* 8.) *dat pedes lateris AC.*

PRO-

PROPOSITIO XLVIII.

SI quadratum ab uno trianguli latere (AB) deſcriptum, ſit æquale duobus reliquorum laterum (AC, BC) quadratis, angulus (ACB) quem reliqua latera continent, rectus erit. Fig. 76.

Si negas, erit angulus ACB recto major aut minor. Ergo (ut demonſtrabitur prop. 12. & 13. l. 2. quæ ab hac non dependent) quadratum AB non erit æquale quadratis AC, BC, contra hypotheſim.

Vel ſic. Duc FC perpendicularem ad AC, & æqualem CB, & junge AF. Quadratum AF æquale eſt *a* quadratis FC, CA; hoc eſt *b* quadratis BC, CA; hoc eſt per hyp. quadrato AB. Ergo rectæ AF, AB æquales ſunt. Quoniam igitur trigona X, Z, ſunt ſibi mutuo æquilatera, anguli ad C *c* ſunt æquales. Ergo *d* recti. Quod erat demonſtrandum.

a *Per* 47. *l.* 1.
b *Per conſtruct.*
c *Per* 8. *l.* 1.
d *Per def.* 14.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER SECUNDUS.

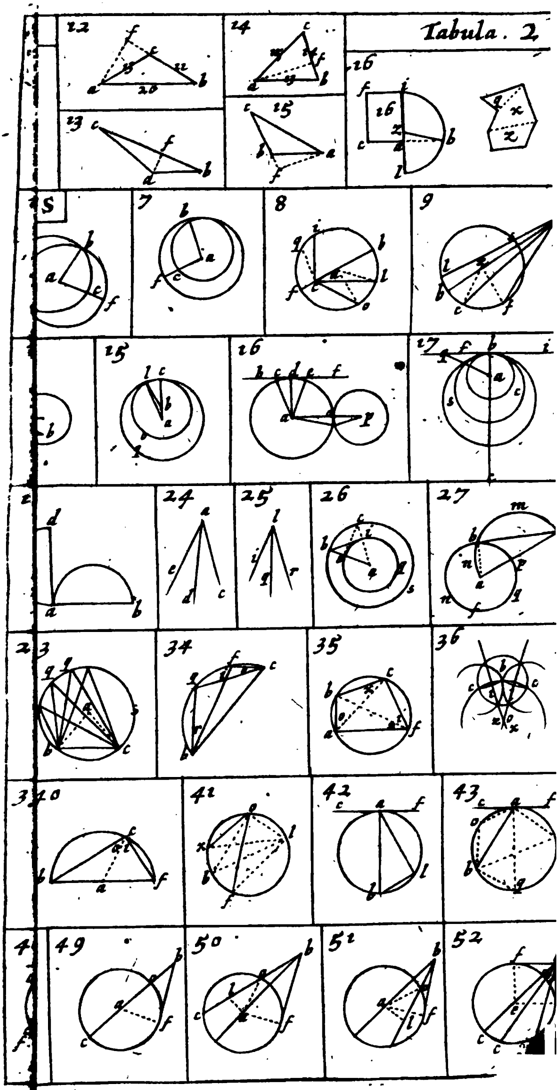
Hic liber mole parvus; at præſtantiâ ac utilitate theorematum planè magnus. Tyrones, ſcio, quod dico nondum capient, ſed eſſe veriſſimum ulteriùs provecti uſu ipſo certiſſimè intelligent.

DEFINITIO.

Fig.60.l. 1. PArallelogrammum rectangulum (AE) (quod rectangulum ſimpliciter ſine ullo addito appellari ſolet) contineri dicitur ſub duabus lineis rectis (A C, AF) rectum angulum comprehendentibus.

Nam earum altera A C altitudinem rectanguli, altera A F latitudinem determinat. Deinde ſi intelligatur latus A C ferri perpendiculariter per totam AF, aut AF per totam A C, producetur eo motu area rectanguli. Quare meritò rectangulum fieri dicitur ex ductu, ſeu multiplicatione duorum laterum contiguorum.

Fig.2, lib.2. *Quando igitur dicitur ex gr. rectangulum ſub* (vel


Tabula. 2

(vel ex) AC, CB, vel brevitatis cauſâ, rectangulum ACB, deſignatur rectangulum quod continetur ſub AC, & CB ad rectum angulum conſtitutis. Similiter, cùm dicitur rectangulum ſub AB, CB, vel rectangulum ABC, deſignatur rectangulum contentum ſub rectis AB, & BC rectum angulum comprehendentibus, Fig. ead.

Rectangulum porrò aliud eſt oblongum, aliud quadratum, Oblongum eſt quod latera continua habet inæqualia, ſive quod continetur ſub duabus rectis inæqualibus. Quadratum rectangulum eſt, quod ſub duabus æqualibus continetur.

NOTA.

Signum æqualitatis in hoc libro eſt. Æ,

PROPOSITIO PRIMA.

SI fuerint duæ (AB, AC) quarum altera ſecta ſit in quotcunque partes (AE, EF, FC) erit rectangulum ſub illis duabus (AB, AC) comprehenſum, æquale rectangulis, quæ ſub inſectâ (AB) & ſingulis ſectæ partibus (AE, EF, FC) continentur. Fig. 1. lib. 2.

Statue AB perpendicularem ad AC, per B duc infinitam BR perpendicularem ad AB. Ex E, F, C erige perpendiculares EI, FL, CQ. Erit BC rectangulum ſub AB, & AC, & eſt æquale rectangulis BE,

 IF,

IF, LC, hoc eſt (quia tam IE, quàm L[illegible]
a Per 29. & ſunt *a* æquales AB) rectangulis ſub AB,
34. l. 1. AE, ſub AB, EF, ſub AB, FC.

Scholium.

DEcem prima hujus libri theoremata etiam ve-ra ſunt in numeris, ſi ut lineæ dividantur in partes. Rectangula numerica procreantur ex multiplicatione duorum numerorum, quadrata verò numerica ex multiplicatione numeri per ſe ipſum.

PROPOSITIO II.

Fig. 2. *SI recta (AB) ſecta ſit utcunque (in C) duo rectangula, ſub totâ (AB) & partibus (AC, CB) comprehenſa, quadrato totius æqualia ſunt.*

Accipiatur F æqualis AB.

b Per. 1. l. 2. Rect. FAB. Æ. *b* rect. FAC } rect. FCB }

hoc eſt, quia F & AB ſunt æquales inter ſe,

Quad. ex AB. Æ. rect. BAC } rect. ABC }

PROPOSITIO III.

Fig. 3. *SIt recta (AB) utcunque ſecta (in C) erit rectangulum ſub totâ (AB) & partium alterutrâ (BC) comprehenſum æquale rectan-*

gulo

llo ſub partibus (AC, CB) unà cum quadrato prædictæ partis (BC.)

Aſſume F æqualem CB,

Rect. ABF. Æ. d rect. ACF }
rect. CBF } d Per 1. l. 2.

hoc eſt, quia æquales ſunt CB & F.

Rect. ABC. Æ. rect. ACB. }
quad. CB. }

PROPOSITIO IV.

Sit recta (FL) utcunque ſecta (in O) erit quadratum totius æquale quadratis partium (FO, OL) & bis rectangulo ſub partibus FO, OL) contento. Fig. 4.

Quad. FL. Æ. e rect. FLO cum rect. LFO e Per 2. l. 2.

Atqui rect. FLO. Æ. f rect. FOL }
quad. OL } f Per 3. l. 2.

& rect. LFO. Æ. rect. LOF }
quad. FO }

Ergo quad. FL. Æ. g rect. FOL }
quad. OL }
rect. FOL }
quad. FO } g Per eand.

Id eſt quad. FL. Æ. rect. FOL bis }
quad. OL }
quad. FO. }

PRO-

PROPOSITIO V.

Fig. 5. *SI recta (QX) ſecta fuerit æqualiter (in R) & inæqualiter (in S) erit rectangulum ſub inæqualibus partibus (QS, SX) contentum, unà cum quadrato partis intermediæ (RS) æquale quadrato dimidiæ (QR.)*

b Per 1. l. 2. Rect. QSX *b* Æ. rect. QR, SX } rect. RSX }

Atqui ob æqualitatem rectarum QR, RX
Rect. QR, SX Æ. rect. RXS,
id eſt

c Per 3 l. 2. Æ. *c*. rect. RSX } quad. SX }

Ergo rect. QSX. Æ. rect. RSX } quad. SX } rect. RSX }

Addatur utriuſque quad. RS. habebitur
rect. QSX } rect. RSX } id eſt
e Per 4. l. 2. quad. RS } Æ. quad. SX } *e* quad. RX
rect. RSX } ſeu QR
quad. RS }

PROPOSITIO VI.

Fig. 6. *SI recta (AB) ſit bifariam ſecta (in C,) eique recta quædam adjiciatur (BF) erit re-*

ctangulum ſub totâ compoſitâ (AF) & adjectâ (BF) contentum, unà cum quadrato dimidiæ (CB) æquale quadrato (CF) compoſitæ ex dimidiâ & adjectâ.

Adde in directum LA, æqualem adjectæ BF. Cùm æqualibus AC, BC, æqualia addantur AL, BF, erunt totæ LC, FC æquales. Unde LF ſecta erit æqualiter in C, & inæqualiter in B.

Ergo { rect. LBF. Æ. d quad. CF cum quad. CB. } d Per præc.

Sed ob æqualitatem rectarum LB & AF

rect. LBF. Æ. rect. AFB.

{Ergo rect. AFB. Æ. quad. CF quad. CB.

PROPOSITIO VII.

SI recta (AB) fuerit utcunque ſecta (in C) erunt quadrata totius (AB) & ſegmenti alterutrius (AC) æqualia bis rectangulo contento ſub totâ (AB) & ſegmento dicto (AC) unà cum quadrato ſegmenti alterius (CB.) Fig. 7.

Qua. AB, a Æ. { rect. BCA bis, quad. AC, quad. BC. } a Per 4. l. 2.

Adde

Adde utriſque quad. AC. erunt

{ Quad. AB. Æ. rect. BCA bis
{ quad. AC quad. AC bis
  quad. BC.

Atqui rect. BCA bis cum quadrato AC bis, æquatur *b* rectangulo BAC bis. Quare ſi pro BCA bis & quad. AC bis ſubſtituamus BAC bis; erit.

b Per 3. l. 2.

{ Quad. AB. Æ. rect. BAC bis }
{ quad. AC quad. BC }

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8.

SI recta (LF) fuerit ſecta bifariam (in I) eique quadam recta adjiciatur (FO) erit rectangulum (LIO) quod ſub (LI) dimidiâ, & (IO) compoſitâ ex dimidiâ & adjectâ continetur, quater ſumtum, unà cum quadrato adjectæ (FO) æquale quadrato totius compoſitæ (LO.)

a Per præc.

{ Quad. IO. *a* Æ. rect. OIF bis }
{ quad. IF quad. FO }

hoc eſt, quia ex hyp. FI, LI, ſunt æquales ac proinde quad. FI eſt quad. LI, & rect. OIF eſt rect. OIL, ſeu LIO.

quad. IO. Æ. rect. LIO bis }
quad. LI quad. FO }

Quare ſi utriſque æqualibus addas rect. LIO bis. Erit

quad.

{ quad. FO
quad. LI.
rect. LIO bis.
id eſt.

b quad. LO. Æ. rect. LIO bis } b Per 4. l. 2.
quad. FO
rect. LIO bis
Ideſt

Æ. rect. LIO quater }
& quad. FO

PROPOSITIO IX.

SI recta (AC) ſit diviſa bifariam (in B) & non bifariam (in F) erunt quadrata partium inæqualium (AF, FC) dupla quadratorum dimidiæ AB) & partis intermediæ (BF.) *Fig.*

quad. AF. Æ. a rect. ABF bis } a Per 4. l. 2.
quad. AB
quad. BF

Addito igitur utriſque quad. FC,

{ quad. AF. Æ. rect. AB bis
quad. FC quad. AB }
quad. BF.
quad. FC

Sed rect. CBF eſt rect. ABF, quia AB. BC ſunt æquales ex hyp.

Ergo

Ergo {quad. AF. Æ. rect. CBF bis / quad. FC} {quad. AB / quad. BF / quad. FC}

b Per. 7. l. 2. Atqui *b* CBF bis cum quad. FC æquatur quadrata BC, BF, ſeu AB, BF: quare ſi hæc illis ſubſtituas, erunt

{quad. AF. Æ. quad AB / quad. FC} {quad. BA / quad. BF / quad. BF}

Id eſt

{quad. AB / quad. BF} bis

PROPOSITIO X.

Fig. 10. *SI recta (FI) ſit biſecta (in L) eique quædam recta adjiciatur (IO) erunt quadrata totius compoſitæ (FO) & adjectæ (IO) dupla quadratorum quæ deſcribuntur ſuper dimidiâ (L) & ſuper (LO) compoſitâ ex dimidiâ & adjectâ.*

Adjiciatur in directum QF, æqualis IO. Quia ergo etiam FL, IL æquantur ex hyp. erunt totæ QL, OL æquales, ac proinde QO biſecta eſt in L, & alter in I. Ergo

a Per præc. {quad. QI. / quad. IO} Æ *a* {quad. QL / quad. LI} bis

Sed

Sed quad. QI eſt quad. FO, & quad. QL eſt quad. LO, & quad L I eſt quad. FL.

Ergo { quad. FO. Æ quad. F L } bis
{ quad. IO. quad. L O }

PROPOSITIO XI.

Datam rectam (ABC) itaſecare (in C) ut rectangulum (A B C) ſub totâ & unâ parte contentum æquale ſit quadrato partis reliquæ (A C.) *Fig. 11.*

Ex A erige perpendicularem A F parem AB. AF biſeca in X. Duc rectam XB, cui ex F A productâ æqualem abſcinde XI. Tum abſcinde A C æqualem A I. Dico factum.

Perficiatur quadratum BAFS, & ductâ per C perpendiculari, perficiatur quoque rectangulum FILO. Quoniam FA biſecta eſt in X, eique adjecta eſt AI, erit

{ rect. FIA. Æ. *d* quad. XI. d Per 6. l. 2.
{ quad. XA

id eſt

Æ. *e* quad. XB. *e Per conſtr.*

Id eſt

Æ. *f* quad. BA } *f per 47. l. 1.*
quad. XA }

E Au-

Auferatur utrimque quad. XA. Erit rect. FIA ſeu FL. æ. quad. BA id eſt AS.

Quare ablato rurſum communi AO

Erit AL. æ. CS

Atqui AL eſt quadratum AC, cùm AI, AC ex conſtr. ſint æquales: & CS eſt rect. ABC, cùm BS ſit par AB. Ergo rectang. ABC æquatur quadrato AC. Datam igitur rectam ſecuimus, ut petebatur.

Scholium.

Propoſitiones 10. primæ hujus libri veræ ſunt, etiam in numeris. Hæc 11. numeris explicari non poteſt. Neque enim ullus numerus ita ſecari poteſt, ut productum ex toto in partem unam æquale ſit quadrato partis reliquæ. Porrò mira vis eſt hujus ſectionis, de quâ vide prop. 30. l. 6.

PROPOSITIO XII.

Fig. 12. *In trigono obtuſangulo (ACB) quadratum lateris (AB) obtuſo angulo oppoſiti quadrata laterum reliquorum (AC, BC) excedit rectangulo (BCF) bis, quod comprehenditur ſub (BC) latere alterutro obtuſum angulum (ACB) continentium, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis (AF) & ſub (FC) interceptâ exteriùs inter perpendicularem & obtuſum angulum.*

Quad.

Quad. A B. Æ. *a* quad. AF } *a Per.* 47, *l.* 1.
quad. BF

Sed quad. B F eſt *b* æquale quadratis FC, CB, & rect. BCF bis. Ergo ſi hæc ſubſtituas pro quad. B F; erit *b Per* 4, *l.* 1.

Quad. A B. Æ. quad. A F }
quad. F C
quad. C B
rect. BCF bis

Atqui quadrata AF, FC æquantur quadrato *c* AC. Quare hoc pro illis ſubſtituto, erit *c Per* 47, *l.* 1.

Quad. A B. Æ. quad. A C }
quad. C B
rect. BCF bis

PROPOSITIO XIII.

IN triangulo quocunque (ACB) quadratum lateris (A B) acuto angulo (C) oppoſiti à quadratis laterum reliquorum (A C, BC) exceditur rectangulo (B C F) bis, quod continetur ſub (B C) latere alterutro acutum angulum (C) comprehendentium, in quod cadit perpendicularis (A F) ab oppoſito (A) & ſub (CF) interceptâ inter perpendicularem (A F) & acutum angulum (C.) Fig. 13. 14.

a Per 4. l. 2. Quad. BC. Æ. a rect. BFC bi[s]
quad. BF
quad. FC

b Per 47. l. 1. Et quad. AC. b Æ. quad. FC
quad. AF.

Quare duo ſimul {quad. BC. Æ. rect. BFC bis
quad. AC. quad. BF
quad. FC bis
quad. AF.

c Per 3. l. 2. Atqui rectang. BFC bis cum qua[d.]
FC bis æquatur c rectangulo BCF bi[s.]
Ergo hoc pro illis ſubſtituto
{Quad. BC. Æ. rect. BCF bis
quad. AC quad. BF
quad. AF.

d Per 47. l. 1. Atqui quadrata AF, BF, ſunt d qua[d.]
AB. Ergo hoc pro illis ſubſtituto
{Quad. BC. rect. BCF bis
Quad. AC. Æ. quad. AB

Hoc eſt, BC, AC quadrata, excedunt quad.
AB rectangulo BCF bis.

Corollarium.

Fig. 15. VEra eſt propoſitio, licèt perpendicula-
ris cadat extra triangulum. Demon-
ſtratio fere eadem eſt.

Scholium.

*EX hac & 47. lib. 1. habetur dimenſio cujuſ-
cunque trianguli, cujus tria latera ſint nota,
licèt*

...ut aream habeat imperviam. Horum quippe theorematum beneficio innoteſcit perpendicularis, etiamſi eam impedimenta loci non ſinant deſignari. Perpendicularis autem multiplicata per ſemiſſem lateris, cui incidit, producit aream trianguli, ut patet ex ſcholio propoſ. 41. l. 1.

Eſto trigonum quodcunque A C B nota habens latera. Oporteat notam reddere perpendicularem A F ex dato angulo A in latus oppoſitum B C. Fig. 13. vel 14.

Quadratum lateris A B acuto C oppoſiti auf r ex ſummâ quadratorum A C, C B. Per 13. reſiduum erit rectangulum B C F bis. Reſidui ſemiſſem (hoc eſt rectangulum B C F) divide per notum latus BC. Proveniet recta C F. Quadratum rectæ C F aufer ex quadrato A C. Reſiduum dabit quadratum b *A F, cujus radix quadrata dabit perpendicularem A F.* b Per Prop. 2 ſchol. poſt. 47. l. 1.

Obtinere id ipſum poteris etiam ex p. 12. Verùm 13. ſufficit, cùm in omni triangulo perpendicularis ex aliquo angulo in latus oppoſitum intra triangulum cadat.

PROPOSITIO XVI.

DAto rectilineo (Q X Z) æquale quadratum conſtruere. Fig. 16.

Rectilineo Q X Z fac æquale *a* parallelogrammum rectang. CI, cujus latera IA, CA, ſi æqualia fuerint, ipſum erit quadratum, quod petitur: ſi inæqualia ſunt, latus majus I O produc in L, donec A L ſit par AC. IL biſeca in Z, quo centro per I & L a Per 45. l. 1.

deſcribo circulum, & producatur CA, do nec circumferentiæ occurrat in B. Quadratum rectæ A B æquale eſt dato Q X Z.

Ducatur enim recta Z B. Quoniam IL ſecta eſt bifariam in Z, & aliter in A: erit

a *Per 5. l. 2.* {rect. I A L. Æ. a quad. Z L; hoc eſt {quad. Z A.

b *Per conſtr.* Æ. b quad. Z B: hoc eſt

c *Per 47, l. 1.* Æ. c quad. Z A} quad. B A}

Ablato igitur utrimque quadrato Z A communi, remanet

rect. I A L. Æ. quad. B A:

hoc eſt, quia A C, A L ſunt æquales, erit

rect. C I. Æ. quad. A B

d *Per conſtr.* Id eſt d rectil. Q X Z.

Scholium.

Conſtructio Euclidea requirit, ut per 45. l. 1. rectilineum reducatur ad rectangulum. Quæ reductio cùm ſatis operoſa ſit, fortaſſe expeditius problema abſolvetur hunc in modum.

Rectilineum datum reſolvatur in tot quadrangula (Z, X) quot poteſt. Tum ſingulis quadrangulis e *Per ſchol. p. 45. l. 1.* *fac e rectangula æqualia. Si tunc ſuperſit (ut hic contingit) unum triangulum (Q) illi quoque fac* f *Per coroll. p. 42. l. 1.* *f æquale rectangulum, ſingulis deinde rectangulis per hanc 14 fac quadrata æqualia: ac demum his* g *Per prop. 1 ſchol. p. 47. l. 1.* *omnibus quadratis unum æquale g fiat. Erit hoc æquale dato Q X Z.*

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER TERTIUS.

PErfectiſſime inter planas figuræ proprietates fundamentales hoc libro demonſtrantur. Libri utilitas vel hoc ſolo innoteſcit, quòd tractet de Circulo rerum admirabilium per Matheſim univerſam fonte uberrimo. Theoremata illuſtriora ſunt 16. 20. 21. 22. 31. 32. 35. 36.

DIFINITIONES.

1. CIrculi æquales ſunt, quorum diametri ſeu ſemidiametri ſunt æquales.

2. Recta (FB) circulum tangere dicitur, quæ circulo ſic occurrit (in B) ut tamen producta circulum non ſecet. *Fig.* 20. *l.* 3.

3. Circuli tangere ſe dicuntur, cùm ſibi ſic occurrant, ut tamen non ſecent. *Fig.* 13. & 14.

4. In circulo æqualiter à centro (A) diſtare dicuntur rectæ (BC, FL) cùm perpendiculares (AI, AO) quæ *Fig.* 18.

ex centro in ipſas ducuntur, ſunt æquale[s]

Fig. 37. 5. Segmenta, ſeu portiones circuli ſu[nt] partes, in quas circulum dividit re[cta] (CE) circulum ſecans.

Fig. 33. 6. Angulus in ſegmento eſt (BQ) q[ui] continetur ſub rectis lineis, quæ ad unum circumferentiæ punctum (Q) ex ſegmenti terminis (C, B) ducuntur.

Fig. 33. 7. Angulus (GQB) inſiſtere dicitur peripheriæ (BOC) quæ illi opponitur.

Fig. 11. 8. Sector eſt pars circuli à duobus ſemidiametris (AB, AF) & arcu (BF vel BCF) quem ſemidiametri intercipiunt, comprehenſa.

PROPOSITIO PRIMA.

Dati circuli centrum invenire.

Fig. 1 *lib*. 3. Ducatur in circulo recta BC utcunque, quam biſeca in Q. Per Q duc perpendicularem LF. Hanc biſeca in A. Erit A centrum.

Si negas; centrum eſto O extra rectam FL (nam in FL eſſe non poterit, cùm ubilibet extra A dividatur inæqualiter) ducanturque BO, QO, CO. Quoniam igitur vis O centrum eſſe, erunt BO, CO æquales. Triangula igitur BOQ, COQ ſibi mutuo æquilatera ſunt, cùm etiam ex con-

ſtr.

ſtr. BQ. & QC, ſint pares, & QO communis. Ergo *a* angulus OQC æquatur angulo OQB. Ergo OQC *b* rectus eſt; ac proinde angulo LQC per conſtr. recto æquatur, pars toti. Quod eſt abſurdum. *a Per 8. l. 1.* *b Per defin. 14. l. 1.*

Corollarium.

EX demonſtratis patet, ſi in circulo recta (LF) aliam (BC) bifariam & perpendiculariter ſecat, in ſecante eſſe centrum.

Facillimè per normam invenitur centrum, vertice Q ad circumferentiam applicato. Si enim recta DE jungens puncta, D & E, in quibus normæ latera peripheriam ſecant, biſecetur in A, erit A centrum. Demonſtratio pendet ex 31. hujus. *Fig. 2.*

PROPOSITIO II.

SI *in circuli ambitu duo puncta ſumantur (B, C) recta, quæ per illa ducitur, intra circulum cadit.* *Fig. 2.*

Accipiatur in rectâ BC quodvis punctum O, & ex centro A ducantur AO, AB, AC. Quoniam AB, AC æquantur, etiam *a* anguli B & C æquales erunt. Quoniam igitur externus AOC *b* major eſt inter- *a Per. 5. l. 1.* *b Per corol. 1. p. 32. l. 1.*

terno B, major erit quoque quàm C. In triangulo igitur O A C, latus A C ſubtendens majorem angulum A O C, majus eſt
c Per 19. l. 1. Fig. 3. c latere A O ſubtendente minorem C. Cùm igitur A C tantùm pertingat ex centro ad circumferentiam, A O non pertinget. Ergo punctum O intra circulum cadet. Idem oſtendetur de quovis alio puncto rectæ BC. Tota ergo B C cadit intra circulum.

Ex ipſa etiam notione lineæ rectæ, & circularis, propoſitio eſt manifeſta.

PROPOSITIO III.

SI in circulo recta per centrum ducta (B L) aliam (CF) non per centrum ductam ſecet bifariam, ſecabit quoque perpendiculariter. Et ſi ſecet perpendiculariter, ſecabit bifariam.

1. Pars. Ex A centro ducantur A C, A F. Triangula X, Z ſibi mutuo æquilatera ſunt, nam C O, F O, ex hypotheſi & AC, AF, quia ex centro, æquales ſunt:
f Per 8, l. 1. A O verò communis eſt. Ergo f anguli
i Per defin. 14. l. 1. A O C, A O F æquales. Ergo i recti. Quod erat primum.

2. Pars. Quia ex hyp. anguli A O C,
o Per 47, l. 1. A O F ſunt recti, erit quad. A C o æquale quadratis A O, C O; & quad. A F æqua-

quale quadratis A O, F O. Cùm igitur quadrata A C, A F æqualia ſint, etiam duo ſimul A O, C O duobus ſimul A O, F O æqualia erunt. Quare ablato utrimque communi quadrato A O, remanent C O, F O æqualia. Ac proinde etiam rectæ C O, F O, ſunt æquales. Quod erat alterum.

PROPOSITIO IV.

SI in circulo duæ rectæ (B C, F L) non ambæ per centrum ductæ, ſe ſecent, non ſecabunt ſe mutuo biſariam. Fig. 4. & 5.

Nam ſi una L F tranſeat per centrum, patet hanc non biſecari ab alterâ B C, quæ ex hyp. per centrum A non tranſit. Fig. 5.

Si neutra per centrum tranſit, ex A centro duc A O. Si jam ambæ B C, F L forent biſectæ in O, anguli quoque A O C, A O L eſſent a recti, ac proinde æquales, totum & pars, quod fieri non poteſt. Fig. 4. a Per præc.

PROPOSITIO V. & VI.

CIrculi ſe mutuo ſecantes, aut interiùs tangentes non habent idem centrum. Fig. 6. & 7.

Alias

Aliàs enim ductis ex communi cen
A rectis AB, ACF, eſſent AC, AF, (pars
totum) æquales, quia ambæ ſunt æqual
eidem A B.

PROPOSITIO VII.

Fig. 8. *SI in circulo quodvis aliud à centro (A) ac-
piatur punctum (C) ex quo rectæ plures C
CL, CO, CF, incircumferentiam cadant.*

1. *Maxima erit (CB) quæ per centru
tranſit.*

2. *Reliqua diametri pars (CF) minima.*

3. *Aliarum verò major eſt ea, quæ maxi-
ma (CB propior.*

4. *Neque plures quàm duæ ex dicto puncto
(C) quod à centro diverſum eſt, ad circum-
ferentiam duci poſſunt æquales.*

Pars 1. Ducatur ex A centro recta AL.
Quoniam AL, AB æquales ſunt, additâ
communi AC, erunt LA cum A C, & BC
b Per.20. l.1. æquales. Sed LA, AC ſunt majores *b* quàm
LC. Ergo etiam BC major, quàm LC. Eo-
dem modo B C oſtendetur major quâvis
aliâ.

Pars 2. Ex centro duc AO rectam. AO,
b Per eand. (hoc eſt A F) eſt minor *b* quàm A C, CO.
Ablatâ igitur communi AC, remanet FC
mi-

minor quàm CO. Eodem modo erit CF minor quâvis aliâ.

Pars 3. In triangulis COA, CLA latera LA, AC æquantur lateribus OA, AC. Angulus vero LAC major eſt angulo OAC. Ergo c baſis LC major baſi OC. c Per 24. l. 1.

Pars 4. Patet ex præcedentibus. Nam ſi tres duci poſſent æquales, CO, CI, CQ, forent duæ CQ, CI ad eandem partem inter ſe æquales. Quod repugnat parti 3.

PROPOSITIO VIII.

Si à puncto extra circulum accepto (A) ad circulum ducantur plures rectæ (AB, AC, AF)(AO, AQ, AR.) Fig. 9. & 10.

1. *Earum quæ in cavam peripheriam incidunt, maxima eſt (AB) tranſiens per centrum (Z.)*

2. *Aliarum major eſt ea, quæ maximæ (AB) propior.*

3. *Extra circulum minima eſt (AO) quæ producta per centrum tranſit.*

4. *Quæ minimæ propior, minor eſt remotiore.*

5. *Non plures quàm duæ ex dicto puncto (A) in peripheriam duci poſſunt æquales, ſive intra circulum, ſive extra.*

Pars

Fig. 9. Pars 1. ex centro Z, duc ZC. Quia æquantur Z C, Z B; additâ communi A Z, erunt AZ, ZC ipſi AB æquales. Sed A Z, ZC majores ſunt *a* quàm A C. Ergo etiam AB major A C. Eodem modo erit A B major quâvis aliâ.

a *Per* 20. *l.* 1.

Pars 2. Duc ZF. Latera CZ, Z A æquantur lateribus FZ, ZA. Angulus vero C Z A major eſt angulo F Z A. Ergo *b* baſis C A major baſi F A.

b *Per* 24. *l.* 1.

Fig. 10. Pars 3. Duc Z Q. Duæ AQ, QZ majores ſunt *c* quàm AZ. Ablatis igitur æqualibus ZQ, ZO, remanet AO minor quàm A Q. Eodem modo A O minor erit quâvis aliâ.

c *Per* 20. *l.* 1.

Pars 4. Duc Z R. Rectæ A Q & Q Z, minores ſunt *d* quàm A R, R Z. Ablatis ergo æqualibus Z Q, Z R, remanet A Q minor quàm A R.

d *Per* 21. *l.* 1.

Pars 5. patet ex quatuor præced.

PROPOSITIO IX.

Fig. 11. *SI ab aliquo intra circulum puncto (A) plures quàm duæ æquales ad ambitum duci poſſint; Id punctum centrum erit.*

Patet ex 4. parte prop. 7.

PRO-

PROPOSITIO X.

Circuli in duobus tantùm punctis ſe mutuo ſecant. Fig. 12.

Secent enim ſi fieri poteſt in pluribus B, C, F. Ex A centro circuli LQ ducantur ad B, C, F, rectæ AB, AC, AF. Erunt hæ æquales. Quoniam ergo ex aliquo intra circulum OS puncto A ductæ ſunt tres æquales ad ejus peripheriam, AB, AC, AF, erit A *f* centrum quoque circuli OS. Ergo circuli LQ & OS ſe ſecantes habent idem centrum, quòd repugnat propoſitioni 5. f *Per præc.*

PROPOSITIO XI.

Si duo circuli ſe intus tangant, recta per eorum centra (A, & I) ducta, tranſibit per contactum (B.) Fig. 13.

Si negas, habeant, ſi fieri poteſt, centra eum ſitum, ut recta per illa tranſiens cadat extra contactum B, ſecans circulos in O, & L, ſintque centra ipſa A, & C; ac junge AB, CB. Quoniam igitur CB, CO, æquantur, additâ communi AC, etiam AC, CB, æquales erunt AO. Sed *b* AC, CB ſunt majores quàm AB; Hoc eſt *c* quàm AL. b *Per 20. l. 1.* c *Per defin. circuli.*

Ergo

Ergo etiam A O major eſt quàm AL p
toto. Quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO XII.

Fig. 14.] *SI circuli ſe tangant exteriùs, recta conj gens centra per contactum tranſibit.*

Si negas, ſint ſi fieri poteſt centra ita p ſita, puta in A & B, ut recta per ipſa tra ſiens, per contactum S non incedat, ſed c culos ſecet in O, & Q, junganturque A BS. Erunt igitur *a* AS, S B majores quà AB. Sed AS *b* eſt par AO, & BS par B Ergo etiam AO, B Q ſunt majores quà tota AB, pars toto. Quod fieri non pote

a Per 20. l. 1.
b Per deſin. circuli.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 15. *CIrculi & ſeſe mutuo, & lineam recta punctualiter tangunt.*

Tangant enim ſe intra (ſi fieri pote duo circuli in parte circumferentiæ C Per centra A, & B ducta recta *b* tranſit per contactum puta in C. Ducantur in per AL, BL. Quoniam igitur *c* BL, BC æquantur (ſunt enim ex centro, B ad peripheriam O L C,) additâ communi *AB*,

a Per 11. l. 3.
c Quia ex centro.

erunt

erunt A B, B L æquales A C. Sed A C eſt par A L, (ſunt enim ex centro A ad peripheriam Q L C.) Ergo etiam A B, B L ſunt æquales A L, contra 20. l. 1.

Tangant ſe deinde exteriùs duo circuli, ſi fieri poteſt, in arcu O L. Recta AP centra A & P jungens *d* tranſibit per contactum, puta in O. Ducantur inſuper AL, PL. Erunt igitur duo trianguli latera AL, P L æqualia ipſis, A O, P O, ſeu toti A P. Contra 20. l. 1. *Fig. 16.* d *Per 12. l. 3.*

Denique recta B F & circulus ſe tangant, ſi fieri poteſt, in parte aliquâ C E. Ducantur ad centrum rectæ CA, EA. Erunt igitur C A, E A æquales, ac proinde triangulum CAE eſt iſoſceles. Quare *e* anguli ACE, AEC acuti. Ergo perpendicularis ad BF, ducta ex A centro, cadet inter *f* C & E, puta in D. *Fig. 16.* e *Per coroll. 11. p. 32. l. 1.*

Erunt igitur tam AC, quàm AE æquales perpendiculari A D; quod eſt abſurdum contra Coroll. 14. p. 32. l. 1. f *Per coroll. 8. p. 32. l. 1.*

Corollarium.

Circuli qui habent centra in unâ rectâ, eamque ſecant in eodem puncto B, ſe mutuo in puncto illo B contingunt. *Fig. 17.*

Cæterùm hæc propoſitio liquet etiam ex notione ipsâ linearum, quæ comparantur. Neque enim

aut recta linea & curva circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diverſæ curvaturæ, aut duæ connexæ, ſecundùm ullam ſui partem poſſunt congruere. Congruerent autem ſi invicem in totâ parte aliquâ tangerent.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 18. *IN circulo æquales rectæ (BC, LF) æqualiter à centro diſtant: & quæ diſtant à centro æqualiter, ſunt æquales.*

Ex centro A ducantur AC, AF, item AO, AI ad angulos rectos in ipſis BC,
a Per 3. l. 3. FL. Erunt *a* BC, FL biſectæ in O & I.

Cùm ergo totæ BC, FL ponantur æquales, etiam dimidiæ OC, IF, adeóque & quadrata ipſarum æquantur. Jam verò
d Per 47. l. 1. quad. AC *b* æquale eſt quadratis OC, OA: & quadratum AF æquatur quadratis IF, IA. Cùm igitur quadrata AC, AF æqualia ſint, etiam duo quadrata OC, OA duobus IF, IA æqualia erunt. Ablatis igitur quadratis OC, IF (quæ antè oſtenſa ſunt æqualia) quæ remanent, quad. OA, IA æqualia erunt. Ergo etiam perpendiculares AO, IA ſunt æquales. Ergo BC, FL æ-
a Per defin. 4. l. 3. quales à centro diſtant *c* æqualiter. Quod erat primum.

E converſo ſi diſtantiæ OA, IA ponantur

tur æquales, tunc ablatis quadratis recta-
rum æqualium O A, I A, eodem diſcurſu
oſtendetur quadrata reliqua OC, I F fore
æqualia, ac proinde & rectas O C, I F æ-
quales eſſe, quæ cùm ſint *d* ſemiſſes recta- *d Per 3. l. 3.*
rum B C, F L, etiam illæ æquales erunt.
Quòd erat alterum.

PROPOSITIO XV.

Rectarum circulo inſcriptarum maxima eſt diameter. Cæterarum ea major, quæ centro propior. Fig. 19.

Sit quævis RS alia à diametro FL. Ex centro duc A C, A S. Duæ A R, A S æquantur diametro F L, & ſunt *a* majores quàm R S. Ergo &c. *a Per 20. l. 1.*

Sit deinde BI propior centro quàm XZ. Ex centro ad illas duc perpendiculares AC, AQ. Erit AQ *b* major quàm AC. Accipe ergo A O parem A C, & per O duc RS perpendicularem ad AO, quæ *c* par erit BI, junganturque AR, AS, AX, AZ. Quia igitur A centrum eſt, erunt latera AR, AS æqualia lateribus AX, AZ. Angulus autem RAS major eſt angulo XAZ. Ergo baſis RS, hoc eſt BI, major *d* eſt baſi XZ. Quod erat demonſtrandum. *b Per defin. 4. l. 3.* *c Per præc.* *d Per 24. l. 1.*

PROPOSITIO XVI.

Fig. 20. *Recta (IF) quæ per (B) extremitatem diametri (CB) perpendicularis eſt, tota cadit extra circulum, eumque tangit (in B.) Neque inter ipſam & circulum alia recta ad contactum (B) duci poteſt, quin circulum ſecet.*

Pars 1. Accipiatur in rectâ IBF quodvis punctum L, ad quod ex centro A duc rectam AL. In trigono LAB quoniam angulus ABL rectus eſt per hyp., erit ALB *a* acutus. Ergo AL oppoſita majori angulo ABL major eſt, *b* quàm AB, quæ minori ALB opponitur. Sed AB tantùm pertingit ad circumferentiam. Ergo AL ultra circumferentiam porrigitur, ac proinde punctum L extra circulum eſt. Tota igitur IF extra circulum cadit. Quod erat primum.

a Per coroll. 5. p. 32. l. 1.

b Per 14. l. 1.

Pars 2. Infra BF (ſi fieri poteſt) cadat RF tota extra circulum. Quoniam FBA rectus eſt per hyp., erit RBA acutus, ac proinde AB non eſt perpendicularis ad BR. Ducatur igitur ex A centro ad BR perpendicularis AO, quæ cadet *d* versùs R, & ſecabit circulum in Q. Igitur AB oppoſita majori angulo, nempe AOB recto, ma-

d Per coroll. 3. p. 32. l. 1.

major eſt quàm A O, quæ opponitur minori, nempe acuto OBA. Sed A B par eſt A Q. Ergo etiam A major eſt quàm A O, pars toto.

Corollaria.

1. HInc rurſum patet contactum rectæ lineæ & circularis eſſe punctualem. *Fig.* 10.

2. Si centris in eâdem lineâ rectâ in infinitum protractâ acceptis deſcribantur per B infiniti circuli tam minores primo B SC, quàm majores, omnes tangent rectam IF in eodem uno puncto B. *Fig.* 17.

3. Circuli igitur in amplitudinem quâcunque datâ majorem excreſcentes propiùs ſemper ac propiùs in infinitum tangenti appropinquant, nunquam tamen ei, præterquam in unico contactûs puncto, conjunguntur: quod quamvis evidentiſſimum ſit, eſt tamen revera admirabile.

4. Ex his manifeſtum eſt, lineam quamcunque in infinitum eſſe diviſibilem. Ducatur enim ab aliquo diametri puncto ad tangentem recta AQ. Infiniti circuli centra habentes in rectâ B A ſine termino productá rectam IF, per coroll. 2. hîc, & ſe mutuo per coroll. p. 13. tangunt in uno eodemque puncto B, ac proinde nuſquam *Fig.* 17.

 vel

vel inter ſe, vel cum rectâ I F conjunguntur, prætetquam in B. Ergo neceſſe eſt ut rectam A Q dirimant in partes infinitas, hoc eſt in non tot, quin plures.

Fig. 20. 5. Angulum contingentiæ ſeu contactûs L B Q (eum nempe qui tangente & peripheriâ continetur) nulla recta linea poteſt dividere.

Fig. 17. 6. Per circumferentias tamen in eodem puncto tangentes ſecari poteſt ac minui in infinitum. Atque in hoc & tertio corollario latet totum myſterium aſymptoticum, hoc eſt lineæ rectæ ad Hyperbolam unà ſecum in infinitum productam accedentis ad intervallum quocunque dato minus, nunquam tamen concurrentis: quod præclarè obſervavit & demonſtravit Marius Bettinus noſter in Apiariis, & ante illum Barocius atque Cardanus ex Rabbi Moyſe Narbonenſi, cujus demonſtrationem refert Cardanus de ſubtilitate lib. 16.

Scholium.

Demonſtratur & ſolvitur fallacia paradoxorum, quæ ex angulo contactûs deduci ſolent.

ATque hæc quidem ex 16. prop. hactenus deducta & mira & certa ſunt. Quæ verò deduci

ex

ex eâdem ſolent præterea, omnem captum humanæ mentis excedunt. Quare ſuſpicari aliquando cœpi, latere hîc aliquid, cujus ignoratio ſubtilibus etiam ingeniis illuderet, & paradoxis illis immanibus aſſerendis anſam præberet. Et planè, quod ſuſpicatus ſum, ita ſe habere, mihi tandem videor deprehendiſſe. Paradoxa, quæ ex 16 inferri ſolent, ex aliis multis hæc ferè præcipua ſunt.

1. *Angulus contingentiæ (OAC) omni acuto minor eſt.* Acutus eſto PAC, ab hoc auferri poteſt dimidius, & à reſiduo iterum dimidius, & ſic deinceps ſine termino. Quo pacto acutus fiet quocunque dato minor, quantumvis tamen in infinitum minuatur, ſemper tamen reſidui anguli, ex. gr., anguli QAC latus unum QA a intra circulum cadet, ac proinde angulus contactûs OAC intra acutum continebitur, ejuſque pars erit, ideoque illo minor. Fig. 12. a Per 16. l. 3.

2. *Angulus ſemicirculi, licèt recto minor ſit, eſt omni acuto major.* Quia ob eandem cauſam acutus quantumvis magnus BAQ intra ſemicirculi angulum BAO comprehenditur.

Hæc duo in ipſo textu propoſitionis inferuntur. Quamvis nonnulli dubitent, Euclidis en ſint, an ab aliquo adjecta. Appollonius certè, magnus Geometra, cùm eandem affectionem in ellipſi, hyperbolâ & parabolâ demonſtrat, has illationes prætermittit.

3. *Angulus rectus CAB (imò acutus quicumque CAQ) continet infinitos æquales angulos contactûs, ac proinde infinities illo eſt major.* Nam angulus CAB dividi poteſt in acutos infinitos minores ſemper & minores, quorum nihilominus ſinguli ſunt majores b angulo contactûs OAC. b Per paradox. 1.

 4. An-

4. *Angulus contactûs* C *A O eſt vera pars anguli recti* C*A*B; *eundem quippe unà cum ſemicirculi angulo O A* B *conſtituit: nequit tamen ullâ ſui multiplicatione ſuum totum adæquare: ac proinde hîc infinita æqualia ſibi addita non efficiunt infinitum.*

5. *Tranſitur à minori ad majus & per omnia media, neque tamen per æquale: ſive datur majus aliquo, & datur eodem minus, neque tamen datur eidem æquale.* N*am ſi recta* A*B, fixo manente puncto A, moveatur, donec congruat cum tangente, deſcribet acutos angulos* B *A* P, B*A*Q, *& omnes alios poſſibiles, qui, quamvis ſemper augeantur, ſemper tamen erunt minores* c *ſemicirculi angulo* B *A O, quamprimum vero A* B *congruet tangenti* C*A, immediatè habetur rectus* C*A*B *major angulo ſemicirculi.*

c Per paradox, 2.

Hæc & plura alia ex hac 16. *propoſitione deduci ſolent: quæ profectò, ſi ita, ut proponuntur, ſeſe habeant, meritò incomprehenſibilia videri poſſent.* P*eletarius, ut his paradoxis ſe expediat, negat angulum contactûs eſſe quantum. Rem confecerat, ſi dixiſſet nullum angulum eſſe quantum. Sed is vehementer errat, cùm inde infert omnes ſemicirculi angulos eſſe æquales, quod planè non inferret, ſi intelligeret, quod de contactus angulo aſſeruerat, omnibus angulis convenire. Neque tamen* Cl*avio noſtro in ſuâ illâ adverſus Peletarium apologeticâ diſputatione aſſentior. Meâ quidem ſententiâ uterque fallitur, hic dum omnes omnino angulos eſſe putat quantitatem, ille dum omnes, præter angulum contingentiæ. Alii ſe exiſtimant hac unâ reſponſione omnes difficultates ſolvere, ſi dicant, curvilineos angulos & rectilineos*

neos eſſe incomparabiles. Rogati verò, cur ſint incomparabiles, reſpondent, quia angulus contactûs quantumcumque multiplicatus nunquam poteſt æquare rectum vel acutum.

Atqui hoc eſt paradoxum omnium maximum, cujus explicatio petebatur, quî nimirum fieri poſſit, ut angulus contactûs anguli recti pars ſit, & tamen quotieſcumque multiplicatus eundem ſuperare nequeat, reſpondent angulum contactûs non eſſe partem recti, quia eum non poteſt adæquare. At paradoxorum aſſertores replicant, hinc ſolùm ſequi non eſſe partem recti aliquotam: veram tamen eſſe partem, eo quòd cum ſemicirculi angulo rectum componat. Unde, qui hac viâ difficultates propoſitas volebant diſſolvere, debuerant oſtendere angulum contactûs nullo ſenſu partem eſſe rectilinei anguli, neque addito ſibi ſemicirculi angulo rectum componere: id quod facturi deinceps nos ſumus.

Mihi videtur res omnis ex Euclidæâ definitione anguli pendere. Hæc enim, ſi penitiùs expendatur, manifeſtè docet nullum angulum eſſe quantum, quo uno errore ſublato, paradoxa omnia evaneſcunt. Sentio igitur. Def. 8. l. 1.

1. *Nullus angulus eſt quantitas, ſed modus quantitatis. Sic enim habet definitio* 8. *l.* 1. *Angulus planus eſt duarum linearum &c. alterius ad alteram inclinatio. Atqui linearum inclinatio non eſt quantitas, ſed modus quantitatis, cùm enim curvitas non ſit quantitas, cur inclinatio ſit, quæ ab illâ non magis differt, quàm inflexio & fractio? Deinde. Si angulus eſſet quantus, foret vel linea, vel ſuperficies, vel corpus. Non eſſe lineam aut corpus patet. Sed neque ſuperficies eſt,*

Fig. 23. *ea enim ablatione partium C, B minuitur, non angulus. Neque poteſt dici angulum eſſe ſuperficiem indeterminatam, cùm angulus quilibet determinatus ſit.*

2. *Quoniam anguli non ſunt quantitas, ſed modus quanti, eorum inter ſe comparatorum relatio non eſt æqualitas & inæqualitas, ſed ſimilitudo & diſſimilitudo.*

3. *Cùm igitur anguli inter ſe comparati æquales dicuntur aut inæquales, non aliud intelligi poteſt, quàm eos ſimiles eſſe inter ſe aut diſſimiles. Maluit tamen Euclides æquales & inæquales dicere ob multas horum terminorum in angulis rectilineis commoditates, Quem proinde loquendi modum etiam nos retinebimus.*

4. *Similes porrò anguli ſunt, quorum ambo latera ſuperimpoſita congruum. Diſſimiles, quorum non congruunt latera. Angulus enim nibil eſt aliud, quàm inclinatio linearum, alterius ad alteram. Ergo ſimiles anguli ſunt inclinationes linearum ſimiles. Non ſunt autem inclinationes linearum ſimiles, niſi ambæ ſibi mutuo impoſitæ congruant. Ergo ſimiles anguli ſunt, quorum congruunt latera, diſſimiles, quorum non congruunt.*

5. *Itaque manifeſtum eſt nullum angulum curvilineum æqualem dari poſſe ulli angulo rectilineo. Nam æqualitas angulorum non aliud eſt quàm ſimilitudo, per concluſ. 2. & 3. Similitudo angulorum eſt ſola laterum congruentia per concluſion. 4. Laterum congruentia baberi nequit, dum angulus curvilineus imponitur rectilineo. Ergo &c. Errat igitur Proclus, dum deſcriptis æqualibus ſemicirculis ita ratiocinatur; æqualium ſemicirculorum anguli EAD, CAB æquales ſunt. Ergo ſi bis*

his addatur communis angulus CAD, erit angulus EAC curvilineus æqualis rectilineo DAB. Fallitne ergo axioma, ſi æqualibus addas, vel demas æqualia, tota, vel reliqua erunt æqualia? Nequaquam: hoc enim ad res quantas ſolùm pertinet, anguli porro quanti non ſunt. Axioma ut in angulis valeat ita formari ac intelligi debet. Similes anguli, ſi opponantur ſimilibus angulis ſimiliterque poſitis, qui tum orientur, erunt ſimiles. At Proclus comparat angulos ſimiles quidem: ſed communis, qui utriſque additur, cùm ab unâ parte habeat latus rectum, ab alterâ curvum, diſſimiliter utriſque additur. Fig. 23.

6. *Quare cùm tota eſſentia anguli ſit linearum ſe tangentium inclinatio, non erit unus angulus pars alterius, una ſiquidem inclinatio pars alterius inclinationis non eſt: neque angulus auferri ab angulo poterit; inclinatio ſiquidem una auferri nequit ab alterâ; &c. Hæc enim non laterum inclinationibus, quæ quantitas non ſunt, ſed ſuperficiebus inter latera conſtitutis conveniunt.*

7. *Poſtremò ex jam dictis colligemus, quomodo intelligi debeant illæ locutionum formæ, quibus Geometræ paſſim, atque ipſe inprimis Euclides, utuntur, cùm angulos ſecari, augeri, imminui, alterum alterius duplum, triplum, aliaque ſimilia aſſerunt. Hæc ſanè exſtimabimus eos non propriè, ſed analogicè tantùm angulis tribuere; itaque eos loqui voluiſſe, quòd id commodiùs, & expeditius eſſet, neque tamen obnoxium periculo, modò in angulis rectilineis maneatur. Angulum itaque dividi rectâ DA, non aliud erit, quàm inter latera EA, CA aliam interponi lineam, quæ novas duas cum utroque latere inclinationes, hoc eſt* Fig. 24.

duos

duos novos angulos efficiat. Angulum verò EAC eſſe duplum anguli EAD, nihil rurſum aliud erit, quàm inter lineas rectas EA, CA, aliam interponi, quæ ad utramque ſimiliter inclinetur, unde fiat ut rectæ EA, DA rectis CA, DA, inclinationibus non mutatis, impoſitæ congruant.

Fig. 24. *& Quòd ſi ita ratiocinentur. Angulus EAD eſt æqualis angulo ILQ & DAC eſt æqualis QLR. Ergo totus EAC toti ILR æqualis eſt. Idem erit, ac ſi dicatur; inclinatio rectarum EAD ſimilis, ſeu eadem eſt inclinationi rectarum ILQ: & inclinatio rectarum DAC ſimilis eſt inclinationi rectarum QLR. Ergo etiam inclinatio rectarum EAC ſimilis erit inclinationi rectarum ILR vel certè (quod recidet in idem, ex aſſertione 4. ſupra) collectionem illam ſic intellige: latera EAD congruunt lateribus ILQ; & latera DAC congruunt lateribus QLR. Ergo latera quoque EAC congruent lateribus ILR. Quæ quidem conſecutio æquè clara eſt, atque, ſi æqualibus addas æqualia, tota æqualia eſſe; Ad eum modum locutiones cæteras, quæ, cùm ſint quantis propriæ, ad angulos transferuntur, facilè, veritate theorematum ubique ſalvâ, interpretabimur.*

His ita conſtitutis, facilè paradoxa angularia diſſolvemus; quæ ſanè non aliunde enata ſunt, quàm quòd angulos eodem, quo cæteras quantitates, habuerint loco. Ut igitur ſimul omnia expediam, dico paradoxa illa, ſi in proprio verborum ſenſu accipiantur, ad unum omnia eſſe falſa. Sic enim accepta non conveniunt niſi quanto: anguli autem quanti non ſunt, ut jam oſtendimus.

Itaque angulus contactûs neque minor eſt quovis

acu-

acuto, neque pars eſt anguli rectilinei, neque in rectilineo continetur infinities, imò ne ſemel quidem: nihil enim horum linearum inclinationi poteſt competere, quæ tota anguli eſſentia eſt. Si verò non propriè, ſed analogicè accipiantur, jam nihil continent, quod a communi ſenſu, ac ratione alienum ſit. Sic enim angulum contactûs OAC eſſe minorem quovis acuto, & ſemicirculi angulum OAB acuto omni majorem, non aliud ſignificabit, quàm infra tangentem CA nullam poſſe duci rectam ad contactum, quin ſecet peripheriam. Quæ quidem circuli proprietas eſt omnino digna, quam homines admirentur; eſt tamen ejuſmodi quam poſſimus intelligere, & quæ nihil cum ratione pugnans involvat. Non alius paradoxi tertii, quarti & quinti ſenſus erit. Atque ita unius Euclidææ definitionis ductu, ritè preſpectâ naturâ anguli, omnes immanium paradoxorum tenebræ evaneſcunt.

PROPOSITIO XVII.

A *Puncto dato (B) rectam ducere, quæ datum circulum (OQ) tangat.* Fig. 26.

Ex A dati circuli centro ducatur ad datum punctum B recta AB, ſecans peripheriam in O. Centro A deſcribe per B alium circulum, BS, & ex O duc O C perpendicularem ad A B, quæ occurrat circulo BS in C. Duc C A, occurrentem circulo

OQ

OQ in I. Ex B ad I ducta recta tanget circulum OQ.

Quia latera BA, IA, æquantur lateribus CA, OA, anguluſque A communis eſt in

a Per 4. l. 1. trigonis IAB, OAC, etiam *a* anguli AOC,

b Per conſtr. AIB æquales ſunt, Sed *b* AOC rectus eſt.

c Per 16. l. 3. Ergo etiam rectus eſt AIB. Ergo BI tangit in I.

Scholium.

Fig. 27. *EX 31. ſeq. pulchrè ex dato puncto (O) ducitur tangens circulum datum (BQ.)*

Centrum A & datum punctum O jungens recta biſecetur in P. Tum centro P, per A & O deſcribe circulum occurrentem dato in B. Recta OB tanget.

Nam junctâ AB, angulus ABO in ſemicirculo rectus eſt per 31; ergo per 16. OB tangit circulum BQ.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 28. *SI circulum tangat recta linea (CL) quæ ex centro (A) ad contactum (B) ducitur, tangenti perpendicularis eſt.*

Si negas, ſit ex A centro perpendicula-

a Per 1. part. p. 16. l. 3. ris, alia quædam recta AF: *a* ſecabit ea circulum in O. Quia ergo angulus AFB re-

ctus

ſtus ponitur, erit *b* A B F acutus. b *Per coroll. 5. p. 32. l. 1.*
rgo A B, (hoc eſt A O) major *c* quàm
F, pars toto.

PROPOSITIO XIX.

SI recta (BC) circulum tangat, & ex contactu (A) tangenti perpendicularis excitetur (AI) erit in eâ centrum. Fig. 29.

Si negas, ſit centrum extra A I in Z, & ab eo ad contactum ducatur Z A, erit *d* angulus Z A C rectus, ac proinde d *Per praec.* par angulo I A C, per hypoth. recto, hoc eſt pars toti.

PROPOSITIO XX.

ANgulus ad centrum (B A C) duplus eſt anguli (B F C) ad peripheriam, cùm idem arcus (B C) eſt baſis angulorum. *Fig.* 30. 31. 32.

Triplex eſt caſus. In primo latera BA, BF coincidunt. Tum verò quia A F, AC ex centro ductæ æquantur, erunt in triangulo Z anguli F, & C *a* æquales. Sed BAC a *Per 5. l. 1.* æqualis eſt duobus F & B. Ergo B A C b *Per 32. l. 1.* duplus eſt unius F.

In caſu ſecundo B A, C A cadunt intra *Fig.* 32.
BF,

BF, CF. Tum verò ductâ F A X, per c
ſum primum X A B eſt duplus X F B,
X A C duplus X F C. Ergo totus B A
duplus eſt totius BFC.

Fig. 32. In tertio caſu B F ſecat A C, & ang
B A C, B F C ſunt extra invicem. Duc
tur F A L, per caſum 1. totus L A C dupl
eſt totius L F C, & ablatus L A B duplu
eſt ablati L F B. Ergò & reliquus BAC
duplus eſt reliqui B F C. Quod erat de
monſtrandum.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 33. *ANguli (BQC, BFC,) qui in circul
inſiſtunt eidem arcui (B O C,) ſive qui
eodem ſegmento (B Q S C) exiſtunt, inter
omnes ſunt æquales.*

Sit primò ſegmentum B Q S C maju
ſemicirculo. Ex centro A duc A B, A C
Per præced. angulus B A C ad centrum
duplus eſt ſingulorum B Q C, B F C. Er
a Per ax. 6 go omnes B Q C, B F C ſunt *a* æquale
Quod erat demonſtrandum.

Fig. 34. Sit deinde ſegmentum B Q C æqua
aut minus ſemicirculo. In trangulis B Q
& C F I quia anguli ad verticem I oppoſi
b Per 15. l. 1. ti *b* æquales ſunt, etiam ſumma reliquorum

Q 8

& R ſummæ reliquorum F & O *c* æqualis erit. Quare ſi ab his æqualibus ſummis auferantur anguli R & O, qui per primam partem æquales ſunt, ut poſiti eidem arcui QF inſiſtentes, qui remanent Q, F, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum. *c Per coroll. 10 p. 32. l. 1.*

PROPOSITIO XXII.

QUadrilateri circulo inſcripti (AB CF) oppoſiti anguli duos rectos conficiunt. *Fig. 35.*

Ducantur BF, CA. Angulus ABC cum duobus O & X facit *a* duos rectos. Sed O eſt *b* æqualis I, quia inſiſtunt eidem arcui BC, & X *c* eſt æqualis Z, quia inſiſtunt eidem arcui AB. Ergo ABC cum duobus etiam I, Z, hoc eſt cum toto oppoſito angulo AFC facit duos rectos. Quod erat demonſtrandum. *a Per 32. l. 1.* *b Per 21. l. 3.* *c Per eand.*

PROPOSITIONES XXIII. XXIV.

NOn ſunt neceſſariæ: & agitur de ſegmentis ſimilibus, quæ non poſſunt ſine proportionibus rectè definiri.

PROPOSITIO XXV.

D*Atum arcum* (*ABC*) *perficere.*

Fig. 36. Subtendantur utcunque duæ rectæ A B, C B, quas biſeca in I, & L. Ex I, & L duc perpendiculares ſibi occurrentes in puncto O. Hoc erit centrum circuli, cujus portio eſt arcus A B C.

b Per coroll. p. 1. l. 3. Nam *b* centrum eſt & in rectâ I X, & in rectâ L Z. Ergo in communi ipſis puncto O.

Fig. 36. *Praxis. Centro B ſumto in arcu, deſcribe circulum, eodemque intervallo, aliis in arcu centris deſcribe duos alios circulos, quorum ſinguli priorem bis ſecent. Per interſectiones ductæ rectæ ſibi mutuò occurrentes in O dabunt centrum.*

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

Fig. 37. I*N circuli æqualibus rectæ æquales* (*CE, FI*) *ſubtendunt arcus æquales; & ſi arcus ſunt æquales, etiam ſubtenſæ æquales erunt.*

1. Pars. Ad centra A & B ducantur CA, EA, FB, I B. Quia triangula C AE, FBI, ſibi mutuò æquilatera ſunt, etiam

[tri]ſam erunt ſibi mutuò *a* æquiangula. Er[g]o cùm circuli ſibi mutuò imponentur, [tr]iangulum FBI congruere poterit triangulo CAE, ac proinde centrum B incidet in centrum A, & puncta F, I in puncta C, E. Cùm igitur circuli ſint æquales, etiam arcus FLI neceſſariò congruet arcui CQE, & arcus FOI arcui CSE, ac proinde æquales *b* erunt etiam ipſi. b *Per ax.7.*

Per 2. Quoniam circulorum æqualium arcus FLI, CQE ponuntur æquales, ſibi mutuò impoſiti congruent, punctaque F, I incident in puncta C, E. Ergo & ſubtenſa FI congruet ſubtenſæ CE. Ergo FI, CE *d* æquales ſunt. d *Per ax.7.*

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

Si in circulis æqualibus anguli ſive ad centra (B A C, F L I) ſive ad ambitum (BOC, FSI) ſint æquales, etiam arcus (BXC, FZI) quibus inſiſtunt, ſunt æquales: & ſi arcus ſunt æquales, etiam anguli æquales erunt. Fig. 38.

Pars 1. Quoniam latera AB, AC æquantur LF, LI, (ſunt enim æqualium

circulorum ſemidiametri) & anguli A, L
a Per 4, l. 1. ponuntur æquales, erunt baſes *a* B C, F I
æquales. Ergo arcus B X C, F Z I etiam
b Per præc. *b* æquales ſunt.

Ponantur jam anguli B O C, F S I ad
c Per 20. l. 3. ambitum æquales. Quia igitur *c* horum
dupli ſunt B A C, F L I, etiam illi æquales erunt, ac proinde, ut jam oſtenſum, etiam arcus B X C, F Z I ſunt æquales.

Pars 2. Ex æqualitate arcuum B X C, F Z I habetur per 27. æqualitas ſubtenſarum BC, F I. Ergo, quia etiam B A, A C,
e Per 8. l. 1. æquantur ipſis F L, L I, erunt *e* anguli A
i Per 20. l. 3. & L, ad centrum æquales: & quia *i* anguli O & S horum dimidii ſunt, erunt etiam ipſi æquales.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 39. D*Atum arcum* (*A B C*) *biſecare.*

Duc A C, quam biſeca in O. Ex O perpendicularem duc O B occurrentem arcui in B. Dico factum.

Jungantur enim A B, C B. Latera A O, O B per conſtr. æquantur lateribus C O, O B. & anguli ad O ſunt æquales,
a Per 4, l. 1. quia recti. Ergo baſes A B, B C *a* æquales.

es. Ergo etiam *b* æquantur arcus AB, EB. b *Per* 26. *l.* 3.

Praxis. Centris A & C deſcribe pari intervallo arcus ſe ſecantes in punctis F, & I, perque ducta recta arcum A B C biſecabit. *Fig.* 39.

PROPOSITIO XXXI.

Angulus (BCF) in ſemicirculo rectus eſt: in ſegmento majore minor recto; in ſegmento minore recto major. *Fig.* 40.

1. Pars. Ex centro A duc AC. Quia æquales ſunt AB, AC, anguli O, B *a* æquales erunt. Ob eandem cauſam æquales erunt I, F. Ergo totus BCF utrique B, & F æqualis eſt. Cùm igitur *b* tres ſimul conficiant duos rectos, ſemiſſis trium, angulus BCF, unus rectus eſt. a Per. 5. *l.* 1. b *Per* 32. *l.* 1.

2. Pars. Sit ſegmentum LOBF ſemicirculo LOB majus, in eoque FOL angulus, & ducatur OB. Angulus FOL minor eſt angulo BOL, qui per 1 partem rectus eſt. Ergo. &c. *Fig.* 41.

3. Pars. Eſto ſegmentum LOX ſemicirculo LOB minus, in eoque angulus XOL. Erit hic major quàm BOL, qui rectus eſt. Ergo. &c. *Fig.* 41.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 42. & 43. *SI recta (CF) circulum tangat, & alia contactu ducta (AB) eundem ſecet, e angulus à tangente & ſecante factus par a gulo, qui fit in ſegmento alterno.*

Nimirum angulus CAB erit par angulo L, qui fit in ſegmento ALQB, & angulus FAB par angulo O, qui fit in ſegmento AOB.

Fig. 42. Tranſeat primò ſecans AB per centrum. Per 18. CAB rectus eſt. Et per 31. rectus eſt L. Ergo CAB & L æquales ſunt.

Fig. 43. Tranſeat deinde ſecans AB non per centrum. Ducatur igitur per centrum recta AQ, & jungatur BQ. Quia ABQ in ſemicirculo rectus eſt, faciet BQA cum BAQ *a* rectum unum. Sed etiam CAQ rectus *b* eſt. Ergo BQA cum BAQ æquatur CAQ. Ablato igitur communi BAQ, erit BQA (hoc *c* eſt L) æqualis CAB. Quod erat primum.

Deinde, *d* FAB, CAB faciunt duos rectos; & in quadrilatero BOAL *e* oppoſiti L & O etiam faciunt duos rectos. Ergo duo FAB, CAB æquantur duobus ſimul O & L. Ablatis ergo hinc qui-

a Per 32. l. 1.
b Per 18. l. 3.
c Per 21. l. 3.
d Per 13. l. 1.
e Per 22. l. 3.

dem

em C A B, inde L, quos jam oſtendi æ-
quales, erunt æquales reliqui F A B, &
L. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XXXIII.

Super datâ rectâ (B C) ſegmentum circuli Fig. 44.
conſtruere capiens angulum dato parem.

Si detur angulus acutus A B F, ex B duc B L perpendicularem ad A B, & ad terminum C datæ rectæ B C fac angulo C B L parem *a* B C I, cujus latus ſecabit B L in I. Centro I, per B deſcribe circulum, hic tranſibit per C (quia ob æqualitatem angulorum ad C & B etiam latera C I, B I *b* æqualia ſunt) capietque ſegmentum B Q C angulum parem dato A B F.

a *Per* 23. *l.* 1.

b *Per* 5. *l.* 1.

Nam quia A B diametro B L perpendicularis eſt, A B tanget *d* circulum, quem ſecat B C. Ergo *c* angulus in ſegmento B Q C æquatur angulo A B F.

d *Per* 18. *l.* 3.

c *Per prec.*

Quòd ſi detur angulus obtuſus R B C, eadem conſtrue, eritque ſegmentum C O B quæſitum.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 45. *A Dato circulo ſegmentum auferre capiens angulum dato parem.*

Ad circuli diametrum F A duc perpendicularem B A L; ducatur item A C, *f* quæ faciat angulum B A C parem dato. Hæc auferet ſegmentum A Q C capiens angulum parem dato; uti patet ex 32.

f Per 23. l. 1.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 46. 47. 48. *SI in circulo duæ rectæ (C L, B F) ſe ſecuerint, rectangulum (C O L) ſub ſegmentis unius æquale eſt rectangulo (B O F) ſub ſegmentis alterius comprehenſo.*

Fig. 46. Si ſe interſecant in centro A, res patet.

Si una CL tranſit per centrum A, & reliquam BF ſecat bifariam, ſecabit quoque *a* perpendiculariter, ac proinde quad. FO eſt rectangulum F O B. Ducatur A F; Quoniam C L biſecta eſt in A, & aliter in O, erit

a Per 3. l. 3.

b Per 4. l. 2. { rect. C O L. Æ. *b* quad. A L; hoc eſt
{ quad. A O

c Per 47. l. 1. quad. A F; hoc eſt *c* quad.

quad. A O }
quad. F O }

Demto igitur communi quadrato A O, erit rect. C O L. Æ. quad. F O, hoc eſt rect. F O B.

Si una CL per centrum tranſit, & reliquam BF ſecat inæqualiter in O, ex centro A ducta recta ſecet ipſam BF in I bifariam. Igitur angulus AIB *d* rectus erit. Jam quia C L biſecta eſt in A & aliter in O, erit Fig. 47.

{ rectang. C O L. Æ. *e* quad. AL; hoc eſt
{ cum quad. A O

{ quad A B; hoc eſt *f*
{ quad. AI }
{ quad. BI }

Sed quadratum A O æquatur *g* quadratis O I, A I. Ergo

{ rectang. C O L. Æ. quad. A I. }
{ quad. O I quad. B I. }
{ quad. AI

Demto igitur communi quadrato AI, remanent

{ rect. C O L. Æ. quad. B I
{ quad. O I

Atqui etiam quadratum B I æquatur rectangulo *i* F O B cum quadrato O I, quia F B ſecta eſt bifariam in I & aliter in O. Ergo

d *Per* 3. *l.* 3.
e *Per* 5. *l.* 2.
f *Per* 47. *l.* 1.
g *Per eand.*
i *Per* 5. *l.* 2.

$\left\{\begin{array}{l}\text{rectang. COL. æ. rect. FOB}\\ \text{quad. OI} \qquad \text{quad, OI.}\end{array}\right.$

Dempto igitur communi quadrato OI, erit rect. COL æ. rect. FOB.

Fig. 48. Quòd ſi neutra rectarum CL, FB per centrum tranſeat, per communem earum ſectionem O per centrum A ducatur recta XZ. Per modo demonſtrata tam rectang. COL, quàm rectang. FOB æquantur rectangulo ZOX. Ergo etiam COL, FOB æqualia ſunt inter ſe.

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 49. 50. 51. *SI à puncto (B) extra circulum dato ducantur duæ rectæ, una tangens (BF) altera ſecans (BC) erit rectangulum (CBO) ſub totâ ſecante (CB) & parte (BO) interpunctum & circulum interjectâ comprehenſum, æquale quadrato tangentis (BF.)*

Fig. 49. Si ſecans BC tranſit per centrum A, junge AF, faciet hæc *a* cum FB angulum rectum. Quoniam CO biſecta eſt in A, eique adjecta OB, erit

a Per 18. l. 3.

b Per 6. l. 2. c Per 47. l. 1.

$\left\{\begin{array}{l}\text{rect. CBO,}\ b\\ \text{quad. AO}\end{array}\right.$ æ. quad. AB, hoc eſt *c*

$\left.\begin{array}{l}\text{quad. BF}\\ \text{quad. AF}\end{array}\right\}$

Abla-

tis ergo quadratis AO, AF æquali- remanet

rect. CBO. Æ. quad. BF.

Quòd ſi CB non tranſit per centrum A, Fig. 50. 51. ducantur AB, AF, AO, & AL ex centro biſecet OC in L. Ergo angulus O *d* rectus erit. Item AFB *e* erit re- d Per 3. l. 3. Quoniam verò CO biſecta eſt in L, e Per 18. adjecta eſt OB, erit l. 3.

rect. CBO. } Æ. *f* quad. LB. f Per 6. l. 2.
quad. LO }

Addatur utrimque quadratum AL, erit

{ rect. CBO. Æ. quad. LB }
{ quad. LO quad. AL }
{ quad. AL

Sed quadrata LO, AL æquantur quadra- to AO ſeu AF; & quadrata LB, AL *g* g Per 47. æquantur quadrato AB. Ergo l. 1.

{ rect. CBO. Æ. quad. AB; hoc eſt *k* i Per eand.
{ quad. AF k Per eand.

quad. BF }
quad. AF. }

Ablato igitur communi quadrato AF, re- manet

rect. CBO. Æ. quad. BF.

Corollaria.

Si ab eodem extra circulum puncto B Fig. 52. quotvis ducantur ſecantes BC, omnia re-

rectangula CBO inter ſe æqualia ſ
Singula enim æquantur quadrato tan-
tis BF.

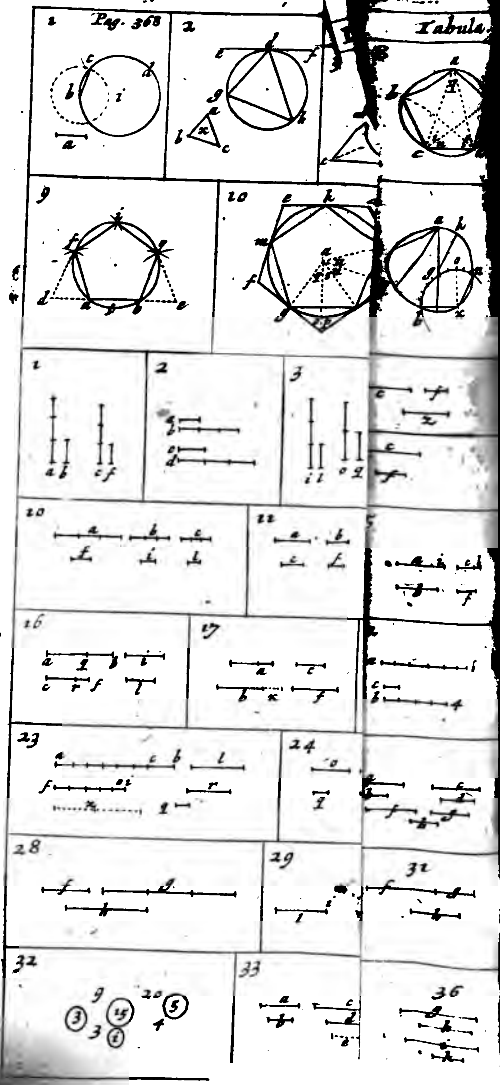
2. Quæ ex eodem puncto circu
tangunt, BF, BQ æquales ſunt. Ear
quippe quadrata æquantur ſingula eid
rectangulo CBO.

PROPOSITIO XXXVII.

Fig. 52. *SI rectangulum ſub CB & OB ſit æq*
quadrato BF, hoc circulum tanget in F

Ex B ducatur tangens BQ, & ex E
centro ductis ad Q & F rectis EQ, EF,
jungatur BE. Quoniam rectangulo CBO
æquantur quadratum BF per hyp. & qua-
dratum BQ per 36. hæc inter ſe æqualia
ſunt, adeoque & rectæ BQ, BF æqua-
les. Igitur triangula FEB, QEB ſibi
b Per 8. l. 1. mutuò ſunt æquilatera. Ergo *b* anguli
c Per 18. l. 3. Q, F æquales erunt. Sed Q *c* rectus eſt.
Ergo etiam F rectus eſt. Ergo BF *d* tan-
d Per 16. l. 3. git.

ELE-


Pag. 368
Tabula

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER IV.

HIc liber totus problematicus eſt, docet, quo artificio figuræ præſertim ordinatæ circulo inſcribantur & conſcribantur. Ampliſſimus eſt illius uſus in munitionibus exſtruendis & ex quaſi fonte eximiæ illæ ſinuum, tangentium, ſecantium tabulæ ingenti bono Matheſeos fluxere.

DEFINITIONES.

FIgura rectilinea circulo inſcripta eſt, vel circulus figuræ circumſcriptus, cùm ſingulorum angulorum vertices in circumferentiâ exiſtunt.

2. Figura rectilinea circulo circumſcripta eſt, vel circulus figuræ inſcriptus eſt, cùm ſingula latera circulum tangunt.

3. Figura ordinata ſeu regularis eſt, quæ æquilatera & æquiangula eſt.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. lib. 4.

Irculo (B D) rectam datam (A) d... metro non majorem inſcribere.

Accipe in peripheria quodvis punctu... B. Centro B intervallo datæ A deſcrib... arcum circulo occurrentem in C. Duc r... ctam B C. Dico factum.

PROPOSITIO II.

Fig. 2.

Irculo triangulum inſcribere dato (X) æ... quiangulum.

o Per 23. l. 1.
a Per 32. l. 3.
b Per conſtr.
c Per 32. l. 3.
d Per conſtr.
e Per corol. 9. p. 32. l. 1.

Circulum tangat E F in D. Fiat angu... lus E D G par *o* angulo C, & F D H par... jungaturque G H. Dico factum. Nam an... gulus H æquatur *a* angulo E D G: hoc eſt... *b* angulo C; & G æquatur *c* F D H; hoc... eſt *d* ipſi B. Ergo etiam G D H *e* æquatur... A. Factum eſt igitur quod petebatur.

PROPOSITIO III.

Fig. 3.

Irculo circumſcribere triangulum æqui... gulum dato I L K.

Latus I K utrimque producatur, ut fiant externi anguli O, & N. Fac in centro A

per

23. l. 1. angulos GAB, BAF pares angulis O, N. Deinde in punctis G, B circulum tangant tres rectæ cocuntes in C, D. Triangulum CDE eſt circulo circumſcriptum & æquiangulum dato I K.

In quadrilatero C G A B, anguli G & B ſunt duo *a* recti. Ergo reliqui G A B, & C conficiunt ſimul etiam duos *b* rectos, ac proinde æquantur duobus ſimul O, I. Ablatis igitur GAB, & O æqualibus per conſtr., remanent æquales C, & I. Eodem modo oſtenditur E æqualis eſſe K. Ergo D & N etiam æquales erunt. Factum eſt igitur quod petebatur.

a *Per* 18. *l.* 3.
b *Per theor.* 1. *ſchol. part.* 2. *p.* 32. *l.* 1.
c *Per corol.* 9. *p.* 32. *l.* 1.

Quòd autem tangentes concurrant, ſic oſtenditur. Anguli O, I, & K, N ſunt æquales *e* 4. rectis, & I, K ſunt minores duobus *f* rectis. Ergo O, N (hoc eſt per conſtruct. G A B & B A F) ſunt majores duobus rectis. Ergo GAF eſt minor duobus *g* rectis. Ergo recta G F cadit inter A & D. Ergo cùm AGD, A F D ſint recti, erunt DGF, DFG duobus rectis minores. Ergo *i* C G D, E F D concurrunt versùs D. Simili ratione demonſtrabis concurrere reliquas.

e *Per* 13. *l.* 1.
f *Per* 32. *l.* 1.
g *Per corol.* 3. *p.* 13. *l.* 1.
i *Per ſchol. poſt.* 31. *l.* 1.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Fig. 30. *Triangulo circulum inſcribere.*

Duos angulos C & E biſeca rectis C A, E A coëuntibus in A. Ex A duc perpendiculares AB, AG, A F. Circulus centro A per B deſcriptus tranſibit etiam per G & F, tangetque tria latera trianguli.

In triangulis enim CAC, & CAB, quia anguli AGC, ABC, itemque GCA, BCA per conſtr. æquantur, & latus quoque AC eſt commune, etiam A G, AB *a* æqualia erunt. Pari modo oſtendam paria eſſe A B, AF. Circulus ergo deſcriptus centro A tranſit per A, G, F: & quia anguli ad B, C, F ſunt recti, tangit *b* omnia trianguli latera. Fecimus ergo quod petebatur.

a *Per* 26. *l.* 1.

b *Per* 16. *l.* 3.

PROPOSITIO V.

Fig. 4. *Triangulo circulum circumſcribere: ſive per tria data puncta (B, C, D) non ad unam rectam poſita circulum deſcribere.*

Puncta data B, C, D binis rectis B C, CD connecte, quas biſeca perpendicularibus OA, EA concurrentibus in A. Hoc erit centrum circuli per B, C, D tranſeuntis.

Du-

Ductæ intelligantur rectæ AC, AD, AB, per conſtr. latera DO, AO æquantur lateribus CO, OA, & anguli ad O ſunt recti. Ergo AD *a* æquatur AC. Eodem modo AB æquatur AC. Ergo etiam AD, AB *b* æquales. Ergo circulus centro A deſcriptus per B tranſibit etiam per C & D. Quod petebatur.

a *Per* 4. *l.* 1.

b Per *ax.* 1.

Ad praxim tantùm opus centris B, C, D deſcribere tres æquales circulos ſe mutuò interſecantes, & per interſectiones ducere rectas, hæ ſibi occurrentes dabunt centrum quæſitum.

PROPOSITIO VI. & VII.

Circulo quadratum inſcribere, & circumſcribere. Fig. 5.

Ducantur diametri BD, CE ſe mutuò ſecantes perpendiculariter; rectæ, quæ harum terminos jungunt, circulo quadratum inſcribunt.

Demonſtratio patet ex 4. l. 1. & ex 31. l. 3. Ducantur deinde quatuor tangentes circulum in B, C, D, E, concurrentes in I, F, G, H. Figura IFGH quadratum eſt circulo circumſcriptum.

Demonſtratio patet ex 18. l. 3. ex coroll. 2. p. 36. l. 3. ex 28. & 34. l. 1.

Scholium.

Fig. 5. *Quadratum circumſcriptum circulo duplum eſt inſcripti. Nam quia angulus B C D in ſemicirculo rectus* d *eſt, erit quadratum ex D B (hoc eſt quadratum F I) æquale quadratis D C, B C, ac proinde duplum quadrati D C, hoc eſt quadrati C D E B.*

d Per 31. l. 3.
e Per 47. l. 1.

PROPOSITIO VIII. & IX.

Fig. 6. *Quadrato (B E F C) circulum inſcribere & circumſcribere.*

Ducantur diametri in quadrato ſe ſecantes in A. Centro A per B deſcriptus circulus tranſibit etiam per E, F, C.

Deinde ex A duc AD perpendicularem ad C B. Centro A per D deſcriptus circulus tanget omnia quadrati latera.

Pars 1. Quia ex hyp. CB, EB latera ſunt æqualia, erunt anguli BCE, BEC *a* æquales. Angulus autem C B E rectus eſt per hyp. Ergo B C E, B E C *b* ſunt ſemirecti. Eodem modo oſtendam C B F & reliquos eſſe ſemirectos, adeóque æquales inter ſe. Ergo in triangulo B A C cùm duo ſint æquales anguli CBA, & BCA, erunt AB & AC *c* æquales. Eâdem ratione A B, A E, A F

a Per 5. l. 1.
b Per coroll. 11. p. 32. l. 1.
c Per 6. l. 1.

AF æquales erunt. Circulus igitur centro A per B deſcriptus tranſibit etiam per E, F, C.

Pars 2. Ex A ſint perpendiculares inſuper AG, AH, AI. Quoniam in triangulis GBA & DBA anguli ad D & G, itemque ad B inter ſe æquales ſunt, latuſque A B commune, latera *d* AD, A G æqualia erunt. Eâdem ratione æqualia ſunt AG, A H, AI. Circulus ergo centro A per D tranſiens tranſibit etiam per G, H, I, tangetque latera *e* omnia quadrati, quia anguli ad D, G, H, I ſunt recti. Fecimus ergo quod petebatur. d *Per* 26. *l.* 1. e *Per* 16. *l.* 1.

PROPOSITIO X.

Triangulum iſoſceles conſtruere (B A C) in quo angulus ad baſim (A B C, vel A C B) ſit duplus anguli ad verticem (A.) Fig. 7.

Sumatur quævis recta AB, quam ita ſeca *a* in D, ut rectangulum A B C ſit æquale quadrato D A. Tum centro A per B deſcribe circulum, cui inſcribe BC *b* æqualem DA, & junge AC. Erit triangulum BAC quæſitum. a *Per* 11. *l.* 2. b *Per* 1. *l.* 4.

Ducatur enim recta DC, & per C, D, A deſcribe *c* circulum. Quoniam rectangu- c *Per* 5. *l.* 4.

lum ABD æquatur quadrato AD, hoc
d Per 37. l. 3. BC, liquet BC tangere *d* circulum D
quem ſecat C D. Ergo angulus BCD
e Per 32. l. 3. quatur *e* angulo A in ſegmento alterno:
ditoque communi DCA, erit BCA æqu
lis duobus A, & DCA. Sed quia late
f Per 5. l. 1. AB, AC æquantur, ABC æqualis *f* e
BCA. Ergo etiam ABC æquatur du
bus A, & DCA. Sed etiam externus BD
g Per 32. l. 1. *g* æquatur duobus internis A & DCA. E
go ABC & BDC æquales ſunt. Re
h Per 6. l. 1. igitur D C æquatur *h* B C, hoc eſt p
i Per 5. l. 1. conſtr. D A. Ergo anguli A & D C A *i* æ
quantur. Quare angulus A B C, qui duo
bus oſtenſus eſt æqualis, duplus erit uniu
A. Factum igitur eſt, quod petebatur.

Corollarium.

Anguli ad baſim ſinguli B & C in trian
gulo iſoſcelio jam conſtructo ſun
duæ quintæ duorum rectorum, ſeu qua
tuor quintæ unius recti, & reliquus A e
una quinta duorum rectorum, ſeu du
quintæ unius. Patet ex propoſitione ha
& ex 32. lib. 1.

PRO

PROPOSITIO XI.

Circulo pentagonum ordinatum inſcribe-re. Fig. 7. & 8.

Deſcribatur *a* triangulum BAC habens angulum ad baſim duplum anguli ad verticem. Huic æquiangulum CAD *o* inſcribe circulo. Angulos ad baſim ACD, & DC ſeca bifariam rectis CE, DB, occurrentibus circulo in E & B. Puncta A, B, C, D, E rectis lineis connexa dabunt pentagonum ordinatum circulo inſcriptum.

a Per præc.
o Per 2. l. 4.

Nam ex conſtructione liquet quinque angulos I, N, Q, S, O æquales eſſe. Quare etiam arcus iis ſubtenſi, AE, ED, DC, CB, BA *b* ſunt æquales. Itaque rectæ ſubtenſæ arcubus etiam æquales *c* erunt. Pentagonum igitur æquilaterum eſt. Eſt verò etiam æquiangulum, *d* quia ejus anguli BAE, AED, &c. inſiſtunt arcubus æqualibus BCDE, ABCD, &c. Factum eſt igitur quod petebatur.

b Per 28. l. 3.
c Per 27. l. 2.
d Per 29. l. 3.

Corollarium.

ANgulus Pentagoni ordinati facit ſex quintas unius recti, ſeu tres quintas Fig. 8.

 duo-

duorum. Nam tres anguli ad A cùm ſ
æquales, utpote æqualibus arcubus F
CD, D E inſiſtentes, & medius per co
præced. ſit duæ quintæ unius recti, tre
mul, hoc eſt ipſe pentagoni angulus, c
ficient ſex quintas unius recti.

Scholium.

INgenioſa eſt Euclidæa pentagoni inſcriptio, multò expeditior illa Ptolemæi, quam lib. 1. Almageſti, & eſt ejuſmodi.

Fig. 12. *Ducantur diametri ED, BF ſe mutuò perpendiculariter interſecantes in A. Radium AD biſeca in C. Centro C per B deſcribe arcum, diametro ED occurrentem in G. Recta GB eſt latus pentagoni, & AG decagoni.*

Demonſtratio hìc dari nequit, pendet enim lib. 14. Eucl. Eam vide apud Clavium in ſcholi poſt. p. 10. l. 13.

Problema.

Fig. 9. *SUper datâ rectâ (AB) pentagonum ordinatum ita conſtrues. Seca* e *AB, ſic ut rectangulum ABC ſit æquale quadrato AC. Ex AB utrimque productâ aufer AD BE æquales majori ſegmento AC. Centris A & D, intervallo AB, deſcribe arcus duos ſe ſecantes in F: Item centris B & E eodem intervallo, ſe ſecantes in G. Rurſum centris F & G, intervallo itidem AB, alios ſe ſecantes in I. Puncta A, F, I, G, B rectis lineis juncta dabunt pentagonum ordinatum*

e Per 11. l. 2.

(hoc

eſt, æquilaterum, & æquiangulum) ſuper da-
AB.
Æquilaterum eſſe patet ex conſtructione: æ-
ngulum eſſe ſic demonſtrabitur. Ducatur DF.
t ex conſtructione triangulum A F D eſſe
les. Et baſis A D eſt majus ſegmentum lateris
F extremâ & mediâ ratione ſecti (eſt enim
F æqualis AB, & AD æqualis AC) Ergo an-
lus o D A F eſt duæ quintæ duorum rectorum. o Per coroll.
go reliquus F A B eſt p tres quintæ duorum re- p. 10. l. 4.
rum, ſive ſex quintæ unius recti: ac proinde eſt p p Per 13.
ngulus pentagoni ordinati. Eodem modo oſtendi- l. 1.
r angulum GBA eſſe ſex quintas unius recti, ac q q Per coroll.
inde parem F A B. Unde neceſſe jam eſt reli- p. 11. l. 4.
os F, G, I his æquales eſſe, ut patet ex 8. l. 1. ſi
ncipiatur ſubtendi recta F G.

PROPOSITIO XII.

Circulo pentagonum ordinatum circumſcribere.

Inſcribatur pentagonum ordinatum per *Fig.* 10.
præced. GHIKM, ducanturque tangen-
tes in punctis. G, H, I, K, M, quæ concur-
rant in B, C, D, E, F. Dico factum.
Ex centro dus rectas A G, A B, A H,
AC, AI. Quoniam BG, BH ex uno pun-
cto B tangunt circulum, æquales *a* erunt. a *Per coroll.*
Trigona igitur GAB, HAB ſibi mutuò 2. *p.* 36. *l.* 3.
æquilatera ſunt. Æquantur ergo *b* anguli b *Per* 8. *l.* 1.
O, P, item Q, S: ac proinde totus B du-

plus eſt ipſius P, & totus GAH duplus eſt S: Eâdem de causâ anguli C & HAI dupli ſunt ipſorum T, & N. Sed GAH, & HAI æquales *c* ſunt, quia inſiſtunt arcubus æqualibus GH, HI, per conſtr. Ergo etiam eorum dimidii S, N æquales erunt. Quoniam igitur in triangulis BAH, CAH, duo anguli S, N æquantur, itemque duo ad H *d* recti, latuſque AH eſt commune, etiam *e* BH, CH, itemque anguli, P, T æquales erunt. Eodem modo oſtendam rectas BG, FG eſſe æquales. Igitur CB, FB duplæ ſunt æqualium BG, BH, ac proinde æquales. Eodem modo oſtendam reliqua latera pentagoni circumſcripti eſſe æqualia. Illud igitur æquilaterum erit: eſt verò & æquiangulum, quia cùm jam oſtenſum ſit angulos B, & C duplos eſſe æqualium P, & T, etiam ipſi æquales erunt: eodemque modo & reliqui. Ordinatum igitur pentagonum circulo circumſcripſimus. Quod erat faciendum.

c Per 29. *l.* 3.

d *Per* 18. *l.* 3.

e Per 26. *l.* 1.

Eodem artificio circulo circumſcribitur ordinata figura quæcunque, ſi priùs illi ſimilis circulo inſcribatur.

PRO-

PROPOSITIO XIII. XIV.

PEntagono ordinato circulum inſcribere, & circumſcribere. Fig. 11.

Duos pentagoni angulos B, C biſeca rectis BN, CS concurrentibus in A. Ex A duc perpendicularem AL.

Circulus centro A per L deſcriptus tanget omnia pentagoni latera. Circulus vero deſcriptus centro A per B tranſibit etiam per C, D, E, F.

Pars 1. In trigonis DCA, BCA, quia latera DC, CA *a* lateribus BC, CA, itemque *b* anguli P, & O æquantur, etiam G, & I æquales *c* erunt. Sunt verò *a* etiam toti B & D æquales. Quare cùm *b* angulus G ſit dimidius anguli B, etiam I erit dimidius ipſius D. Igitur D quoque biſectus eſt rectâ DM. Ob eandem cauſam reliqui pentagoni anguli E, F ſunt biſecti; ác proinde omnes dimidii anguli inter ſe æquales erunt. Ducantur inſuper perpendiculares AM, AS, AN, AR. Quoniam igitur in trigonis LBA, MBA, anguli G, & Q æquantur, & latus LB lateri MB *e* æquale eſt, latuſque BA commune, etiam *f* AL, AM æquales erunt. Pari modo oſtendam reliquas AM, AS, AN, AR inter ſe æqua-

a *Per hyp.*
b *Per conſtr.*
c *Per 4. l. 1.*
a *Per hyp.*
b *Per conſtr.*
e *Per corol. 2. p. 36. l. 3.*
f *Per 4. l. 1.*

 ri.

ri. Circulus ergo centro A tranſiens per L tranſibit etiam per M, S, N, R: & quia anguli ad L, M, S, N, R recti ſunt per

g Per 16. l. 3.

conſtr., tanget *g* quinque latera pentagoni. Quod erat primum.

Pars 2. in trigono CAB, quia anguli O, & G jam oſtenſi ſunt æquales, erunt latera

h Per 16. l. 1.

A C, A B *h* æqualia: eâdemque ratione æquantur etiam A B, A F, A L, A D; ac proinde circulus centro A tranſiens per B tranſibit etiam per C, D, F. Pentagono igitur circulum inſcripſimus & circumſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XV.

Fig. 13.

IN dato circulo Hexagonum ordinatum deſcribere.

Ducatur diameter F A B. Centro B per centrum A deſcribe circulum, qui datum ſecet in C, & D. Item centro F per A deſcribe circulum, qui ſecet datum in E, & G, ſex puncta B, C, E, F, G, D rectis lineis connexa dabunt quæſitum.

Ex centro A emittantur rectæ A C, A

a Ex 1. l. 1.

E, AG, AD. Patet triangula H, I, M, L *a* eſſe æquilatera: deinde quia anguli CAB,

b Per corol 12. p. 32. l 1.

EAF, ſinguli *b* efficiunt unam tertiam recto-

rum duorum, ac proinde ſimul duas ter-
, patet *c* EAC etiam eſſe unam tertiam *c Per corol.*
rum rectorum. Anguli igitur EAC, C *1. p. 13. l. 1*
B æquales ſunt, ſunt autem & latera E
AC æqualia lateribus BA, AC. Ergo *d* *d Per 4, l. 1.*
is EC baſi CB, hoc eſt (ut jam oſten-
m) radio AC æqualis eſt. Quare etiam
æquilaterum eſt. Eodem modo oſtendi-
r, æquilaterum eſſe K. Quoniam igitur
angula omnia H, I, K, L, M, N æqui-
ra ſunt, patet ſingula CB, BD, DG,
F, FE, EC æquari radio circuli AC, ſeu
AB, ac proinde inter ſe. Hexagonum igi-
tur æquilaterum eſt. Eſt verò & æquian-
gulum, cùm ſinguli ejus anguli E, C, B,
D, G, F conſtent duobus æquilateri trian-
guli angulis. Ergo Hexagonum, quod
circulo inſcripſimus, eſt ordinatum.

Corollaria.

1. LAtus hexagoni circulo inſcripti æquale eſt radio.

2. Angulus hexagoni ordinati eſt quatuor tertiæ unius recti, conſtat enim ex duobus angulis trianguli æquilateri, quorum ſinguli conficiunt *d* duas tertias unius recti. *d Per corol. 12. p. 32. l. 1.*

3. Si ducatur inſuper diameter PS, per- *Fig. 14.*
pen-

pendicularis alteri F B, & intervallo ra
PA, centris P, & S, ſectiones fiant in O,
Q, in R, & T; puncta P, E, O, F, R, G, S,
T, B, Q, C rectis lineis connexa dabu
duodecangulum ordinatum unâ circini
Fig. 14. perturâ circulo inſcriptum. Id quod m
gno eſt uſui in Gnomonicâ.

4. Ex demonſtratis elicitur etiam d
ſcriptio facillima trianguli æquilateri
circulo. Ductâ diametro FB, centro B
A centrum deſcribe arcum CAD. Pun
C, F, D rectis juncta dant æquilaterum
quæſitum.

5. Æquilateri trianguli latus (CXD)
à diametro (BF) ad ipſum perpendiculari
quartam partem (BX) abſcindit. Nam an-
guli ACX, BCX, æqualibus arcubus GD,
e Per 29. l. 3. DB inſiſtentes, æquales e ſunt: & latera
AC, CX æquantur lateribus BC, CX. Er-
f Per 4. l. 1. go AX, BX f æquales ſunt. Ergo B X eſt
quarta pars diametri BF.

Scholium.

Problema.

Fig. 13. r Per 1. l. 1. *HExagonum ordinatum ſuper datâ rectâ (CB)
ita conſtrues. Fac r triangulum C A B æqui
laterum ſupra datam CB. Centro A per B & C
deſcribe circulum. Is capiet hexagonum ſuper data
rectâ CB. Patet ex propoſ. & corol. 1.*

Theo

Theorema.

Quadratum ex latere trianguli æquilateri triplum eſt quadrati ex ſemidiametro circuli, cui inſcriptum eſt, adeóque ad quadratum diametri, ut 3. ad 4.

Ducatur ſemidiameter AD. Quadratum FD æquatur quadratis s *FA, DA, & rectangulo FAX bis. Sed rectang. FAX bis eſt par quadrato ſemidiametri FA ſeu DA (nam quia AX, XB æquales* t *ſunt, rectangulum FAX bis æquatur duobus rectangulis, nempe ſub FA, AX, & ſub FA, XB; hoc eſt rectangulo* u *FAB; hoc eſt quadrato FA) Ergo quadratum FD triplum eſt quadrati ex ſemidiametro.* Fig. 14. s Per 12. l. 2. t Per corol. 5. præc. u Per 1. l. 2.

Quia autem quadratum totius diametri FB quadruplum x *eſt quadrati FA, patet quadratum FD eſſe ad quadratum diametri, ut 3. ad 4.* x Per 4. l. 2.

Hinc ſequitur latus æquilateri trianguli eſſe ad diametrum, ut radix quadrata ternarii eſt ad 2., radicem nempe quadratam quaternarii, ac proinde eſſe lineas incommenſurabiles.

PROPOSITIO XVI.

In circulo quindecagonum ordinatum deſcribere. Fig. 15.

Circulo inſcribe *a* latus pentagoni AC, & trianguli *b* æquilateri latus AD. Arcum CD biſeca in E. CE eſt latus quindecagoni. a Per 11. l. 4. b Per coroll. 4. p. 15. l. 4.

Nam ſi tota peripheria ſtatuatur eſſe 15., erit arcus AC, 3. & arcus AD, 5. ac proinde arcus CD, 2. ideoque CE unum.

Co-

Corollarium.

Fig. 15. HAc methodo innumeræ figuræ ordinatæ circulo inſcribentur. Nam ſi duarum ordinatarum latera AC, AD circulo ſint inſcripta, arcuum differentia CD continebit tot latera novæ figuræ ordinatæ quot unitatibus differunt denominatores priorum. Denominator autem novæ figuræ habetur, ſi denominatores priorum inter ſe multiplicentur.

Ut, ſi AD ſit lâtus quadrati, & AC decagoni. Denominatorum differentia eſt 6. Igitur arcus CD continet 6. latera figuræ novæ. Ea verò eſt 40. laterum. Denominatores enim 4. & 10. inter ſe multiplicati faciunt 40.

Scholium.

NOndum reperta ars eſt, quâ ſolo circino & regulâ inſcribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7. 9. 11. 13. 17. &c., cùm illa inſcriptio figurarum dependeat à diviſione circumferentiæ in partes datas, quæ etiamnum deſideratur. Licebit tamen, circuli circumferentiâ in 360. partes diviſâ, mechanicè figuras quaſcunque ordinatas circulo inſcribere hunc in modum.

Problema 1.

Fig. 15. *GRadus* 360. (*hoc eſt totam circumferentiam*) *divide per denominatorem polygoni inſcribendi*

(ex. gr. nonanguli) quot unitatibus conſtat quo-
s (40.) tot graduum fac in centro angulum A
, A K erit latus figuræ quæſitæ (nonangulæ)
lo inſcribendæ.

Problema. 2.

I ſuper datâ rectâ quamvis figuram ordinatam deſcribes præſidio tabellæ ſequentis. Angulus rectus eſt ad angulum figuræ. Fig. 15.

					differ.
In Pentagono	ut	6	ad	6...	1
Hexagono	ut	3	ad	4...	1
Heptagono	ut	7	ad	10...	3
Octagono	ut	2	ad	3...	1
Nonagono	ut	9	ad	14...	5
Decagono	ut	5	ad	8...	3
Undecagono	ut	11	ad	18...	7
Duodecagono	ut	3	ad	5...	2

Oporteat igitur ſuper datâ rectâ XB heptagonum ordinatum deſcribere. Centro X deſcribe circulum, à quo abſcinde quadrantem BO, vide in tabulâ quæ ſit proportio recti anguli ad angulum heptagoni, reperies, ut 7. ad 10., & differentia eſt 3. Quadrantem igitur partire in 7. arcus æquales, quorum adhuc tot ipſi adde ex O in N, quot unitates habet differentia. Per tria puncta BXN deſcribe a circulum, hic capiet heptagonum datæ rectæ XB. Fig. 15. a Per 5. l. 4.

Tabella confecta eſt ope theorematis 2. in ſchol. poſt. 42. l. 1., quo reperitur numerus rectorum angulorum, quos efficiunt anguli cujuſcunque rectilinei, qui numerus diviſus per denominatorem figuræ exhibet denominatorem proportionis anguli figuræ ad rectum. Quo-

Quoniam verò de figuris ordinatis multa h[...] nus ſunt propoſita, finiat hunc librum Procli [...] bre theorema.

Theorema.

TRes tantùm figuræ ordinatæ, videlice[t] triangula æquilatera, 4. quadrata, 3. he[xa]gona ſpatium replere poſſunt, hoc eſt, unam [con]tinuam ſuperficiem conſtituere. Quod ſic dem[on]ſtratur. Ut aliqua figura ordinata ſæpius repe[tita] poſſit replere ſpatium, requiritur, ut anguli [...] rium ejus ſpeciei figurarum circa unum pu[nctum] compoſiti poſſint conficere quatuor rectos; [...] circa unum punctum poſſunt conſtitui, ut pa[tet ex] coroll. 3. p. 13. l. 1., ex. gr., ut triang[ula æ]quilatera poſſint replere ſpatium, requiritur,
Fig. 13. aliquot anguli talium triangulorum N, M, L, [...] H circa punctum A compoſiti efficiant quatuor [re]ctos. Atqui quatuor rectos efficiunt 6. anguli tri[an]guli æquilateri (nam unus facit duas tertias [u]nius recti, ac proinde 6. faciunt 12. tertias [unius] recti, hoc eſt 4. rectos) item 4. anguli quadr[ati,] ut patet, item 3. anguli hexagoni (unus enim [fa]cit 4. tertias c unius recti, ac proinde 3. faci[unt] 12. tertias unius recti, hoc eſt rurſum 4. rect[os.] Ergo &c.

b Per corol. 12. p. 32. l. 1.

c Per corol. 2. p. 15. l. 4.

Quòd autem id nulla alia figura poſſit, li[quido] conſtabit, ſi angulum ejus repertum, ut ſu[pra,] quocunque numero multiplices: ſemper enim deficient à 4. rectis, aut excedent.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER V.

QUanti momenti in Geometriâ ſit ſcientia proportionum, nemo eſt Mathematicus, qui ignoret. Ea traditur ab Euclide toto quinto & ſexto libro. Sed quamvis illi cæteriſque elementorum conditoribus plurimum debeamus, in iis tamen, quæ de proportione tradiderunt, deſiderari aliquid videtur. Difficultas tota in definitione 5. l. 5. vertitur: ubi tradit Euclides, quid ſit putatur magnitudines eſſe proportionales, ſive duas rationes, eaſdem, ſimiles, æquales eſſe. Definit igitur, duas rationes tum æquales dici ſeu ſimiles, quando antecedentia quocunque numero æqualiter multiplicata conſequentibus etiam quocunque numero æqualiter multiplicatis ſemper vel ſimul æqualia ſint, vel ſimul majora, vel ſimul minora. Atque ex eâ definitione omnes deinde 5. & 6. libri demonſtrationes mediatè vel immediatè deducit. Hæc doctrinæ Euclidææ ſumma: quæ multiplicem, ut dixi, difficultatem habet. Nam imprimis certum eſt eâ definitione non naturam æqualium rationum, ſed affectionem ſolummodo aliquam explicari. Deinde illa multiplicium pro- a Hæc definitio declaratur infrà, poſt defin. 6.

I prie-

prietas adducitur, vel tanquam ſignum infall
rationum æqualium, ut, quandocumque ea de
ſtrata fuerit de quibuſvis rationibus, inferre
liceat æquales eas eſſe: vel is ſenſus illius eſt
per magnitudines eandem rationem habentes
aliud intelligi velit, quàm earum multiplices
do jam dicto excedere, vel excedi. Si prim
demonſtrare debuerat, eam affectionem omn
& ſolis rationibus æqualibus ineſſe, ut ex ea
tionum æqualitas certò poſſit inferri. Id verò
mè vulgare theorema eſt, quod neque Eucli
neque alius poſt Euclidem ullus demonſtravi
ſecundum, ſecuri quidem erimus de veritate
rematum in ſenſu definitionis acceptorum,
mè tamen ex vi demonſtrationum nobis conſ
Fig. 2. l. 6 tabulá 4. *poterit de abſolutâ rationum æqualitate. Ex*
plum eſto prima ſexti. Certi erimus ex Eucli
demonſtratione, rationem triangulorum ABC,
DEF æqualem eſſe rationi baſium AC, & D
per rationum æqualitatem ſolùm intelligendo
ctam illam proprietatem multiplicium; non
ligemus tamen rationes illas triangulorum baſi
rationibus verè & abſolutè æquales eſſe, cùm
monſtratum non ſit affectionem illam multiplici
cum abſolutâ & verâ rationum æqualitate nec
ſariò eſſe connexam. Quomodocunque igitur i
definitio accipiatur, librorum 5. ac 6. demonſtr
tiones vacillant, quamdiu demonſtratum non f
rit veram rationum æqualitatem cum eâ mu
plicium proprietate ſemper eſſe connexam. D
que ut ſibi conſtarent omnia, tamen ille mu
plicium labyrinthus mihi aliiſque ſemper diſ
cuit, & tyronibus plurimum ſemper faceſſunt
gotii, quorum ita plerumque mentes intricat,

ſitum vix reperiant. Quare ut doctrinam proportionum, quæ quaſi medulla, atque anima Geometriæ, & univerſæ Matheſeos eſt, ab eâ labe vindicemus, hæc tria præſtare conabimur.

Primò oſtendam, libri quinti theoremata, quæ ab Euclide per multiplices demonſtrantur, eo fere habenda eſſe, quo axiomata, ac proinde declaratione potiùs ſubinde aliquâ, quàm demonſtratione egere. Ita proportionum cognitio, quam circuitus multiplicium difficilem hactenus & obſcuram effecerat, plana & expedita reddetur.

Secundò demonſtrabimus, quandocunque antecedentium quælibet æquè multiplices conſequentium quibuſlibet æquè multiplicibus vel pariter majores ſunt, vel pariter minores, vel pariter æquales, tum rationes eſſe verè æquales, ſeu ſimiles. Quo ſtabilito omnes Euclidææ demonſtrationes, totaque illius de proportionibus doctrina ſubſiſtet, ut, qui noſtris probationibus contentus non ſit, ad Euclidæas, quamvis prolixas, jam tamen ſecuras ac ſolidas ſe poſſit convertere. Aſſignabimus item (ac demonſtrabimus) proportionum æqualium aliud indicium clariſſimum ac primum, ex quo omnes Quinti libri propoſitiones deducere poterit, qui voluerit.

Tertiò. De proportionum denominatoribus, logarithmo, compoſitione, tractatum ſubjungam peritioris Geometriæ ſtudioſis planè neceſſarium, ubi etiam demonſtrabimus axioma illud, ſeu potiùs theorema hactenus indemonſtratum, rationem extremorum ex rationibus quotlibet intermediorum componi.

Tyronibus ſatis erit definitiones & primam partem perlegere.

PRIMA PARS.

Proportionum elementa faciliori metho-do proponuntur.

DEFINITIONES.

1. PArs aliquota magnitudinis eſt, q aliquoties repetita magnitudin metitur, ſive adæquat. Pars aliquan quæ non metitur.

Longitudo unius pedis eſt pars aliquota longi dinis 10. *pedum, quia illam decies repetita me tur. Longitudo verò* 4. *pedum eſt pars aliquan lineæ* 10. *pedum, quia aliquoties repetita, nem pe bis, illam non adæquat, repetita verò ter, ex cedit.*

2. Magnitudo magnitudinis multiplex eſt, cùm minor metitur majorem, ac pro inde ejus pars aliquota eſt; ſive cùm ma jor minorem aliquoties continet præ ciſé.

3. Ratio ſive proportio eſt duarum e juſdem generis magnitudinum mutu quædam ſecundùm quantitatem habitu do.

Sunt igitur in omni proportione duo termin quorum ille Antecedens dicitur, qui primò nom natur, ſive is qui nominandi caſu effertur, alt Conſequens.

Cùm

Cùm antecedens & conſequens ſunt æquales, portio æqualitatis dicitur, cùm inæquales, dicitur eſſe proportio inæqualitatis.

4. Ratio ſeu proportio rationalis eſt, quæ exiſtit inter magnitudines commenſurabiles, & numeris exprimi poteſt. Proportio irrationalis eſt, quæ exiſtit inter magnitudines incommenſurabiles, & nullis numeris explicari poteſt.

Porrò commenſurabiles quantitates ſunt, quas aliqua communis menſura metitur, incommenſurabiles, quas nulla metitur menſura communis.

5. Duæ rationes (A ad B, & C ad F) ſunt ſimiles, æquales, eædem, cùm unius antecedens (A) æquè ſeu eodem modo (hoc eſt nec magis, nec minùs) continet ſuum conſequens (B) quo alterius antecedens (C) continet ſuum conſequens (F.) *Fig. 1. l. 5. tabulâ 3.*

Vel quando unius antecedens (A) eodem modo continetur in ſuo conſequente (*B*) quo (C) antecedens alterius in ſuo (D.) *Fig. 2.*

6. Duæ rationes ſunt diſſimiles, ſive una ratio eſt major alterâ, quando unius antecedens (I) magis continet ſuum conſequens (L) quàm alterius antecedens (O) contineat ſuum conſequens (Q) vel *Fig. 3.* *Fig. 4.*

quando antecedens unius minùs continetur in ſuo conſequente, quàm antecedens alterum contineatur in conſequente ſuo.

Proportionum æqualitas & inæqualitas explicatur.

Quid porrò ſit, unum antecedens æquè, vel magis continere ſuum conſequens, quàm antecedens alterum contineat ſuum, ſi proportiones ſint rationales, definiri & explicari ulteriùs poteſt per numeros, ut ſi A ſit triplum B, & C triplum F, perſpicuum erit, quid ſit, A æquè ſeu eodem modo continere B, quo C continet F: vel
Fig. 3.
ſi I ſit triplum L, O verò duplum Q, conſtabit rurſum, quid ſit I magis continere L, quàm O
Fig. 1.
contineat Q. At ſi proportiones fuerint irrationales, ea res explicari ulteriùs nec poteſt, nec debet. Dentur magnitudines incommenſurabiles A, B,
Fig. 5.
perſpicuum eſt A non ſolùm majus eſſe B, ſed etiam certo quodam modo eſſe majus, (A quippe aliter continet B, quàm alia quælibet major minorve quàm A) neque tamen ulteriùs quæri, aut explicari debet, quis ſit certus ille modus, quo A continet B, quia per nullos numeros explicabilis eſt. Itaque quemadmodum datis binis incommenſurabilibus quantitatibus non debet ulteriùs quæri, quid ſit unam certo modo continere alteram, ita neque cùm dantur quatuor proportionales incommenſurabiles, quæri debet ulteriùs, quid ſit C eodem modo continere D, quo A continet B.
Fig. 5.
Sicuti enim modus, quo A continet B, ulteriùs eſt

eſt inexplicabilis, ita planè etiam identitas modi, quo A continet B, cum modo, quo C continet D, ulteriùs inexplicabilis eſt.

Quod verò cuicumque proportioni irrationali A ad B dabiles ſint infinitæ aliæ proportiones irrationales, majores, minores, diverſis terminis conſtantes, facilè poterimus intelligere hunc in modum. Sumatur quæcunque quantitas C, & auferatur B ex A incommenſurabili ſecum quantitate, quoties poteſt, puta ter, & ſuperſit E F. Sit deinde O tertia pars ipſius C, ſit inſuper quæpiam X ipſi C incommenſurabilis, quæ major ſit quàm O. Quoniam igitur A continet B plus quàm ter, C verò continet X minùs quàm ter (nam C continet præcisè ter O minorem quàm X) erit ratio irrationalis C ad X minor ratione irrationali A ad B. Accipiatur jam Q, quarta pars C, & quæpiam eſto Z, ipſi C incommenſurabilis, quæ minor ſit quàm Q. Quoniam igitur A continet B minùs, quàm quater; C verò continet Z plus quàm quater (cùm C præcisè quater contineat Q majorem quàm Z) erit ratio irrationalis C ad Z major ratione irrationali A ad B. Fig. 5.

Jam verò, quia C ad aliquam X minorem rationem habet quàm A ad B; & rurſum, quia C ad aliquam Z majorem rationem habet quàm A ad B, manifeſtum eſt etiam C ad aliquam D, mediam inter X & Z, eandem habere rationem quam A ad B. Quod quidem perinde clarum eſt lumine naturali, atque iſtud: dabile eſt majus quàm P, & dabile eſt minus quàm P, ergo dabile eſt æquale aliquod ipſi P. Fig. 5.

Quid in proportionum æqualium definiti[...] Euclidæâ deſideretur.

Fig. 21. *QUod ad Euclidem attinet, is duas propor[...] nes A ad B, C ad F æquales eſſe dicit, c[...] antecedentium quæcunque æquè multiplices I, [...] conſequentium quibuſcunque æquè multiplici[...] I, R, vel ſimul majores ſunt, vel ſimul min[...] vel ſimul æquales; hoc eſt, cùm I ſuperat [...] etiam Q ſemper ſuperat R; & cùm I ſup[...] ab L, etiam Q ſemper ſuperatur ab R; & c[...] eſt æqualis L, etiam Q ſemper eſt æqualis R. [...] bene notandum eſt, Euclidem non aſſumere æ[...] multiplicium exceſſus defectuſque proportion[...] ſeu ſimiles, ſic enim ineptè idem explicâſſet, [...] exceſſus & defectus ſimpliciter. Nihilominus [...] aliquid in ſummo Geometrâ deſiderari jam[...] declaravimus. Nam vel cupit hiſce verbis ra[...] nes æquales definire, & ſic rei definitæ propri[...] tatem pro definitione affert; evidens quippe e[...] hanc multiplicium affectionem ex rationum æqua[...] litate profluere: vel adducit tanquam indiciu[...] primum & infallibile rationum æqualium; [...] ſic demonſtrare debuerat, eam cum rationum [...] qualitate ita ſemper eſſe connexam, ut hæc ex [...] lâ certò poſſit inferri. Quæ quidem connexio [...] perobſcura & demonſtratu difficilis eſt: vel de[...] que per rationum æqualitatem nihil aliud intel[...] git, quàm ſimultaneum illum exceſſum defect[...] ve multiplicium; Et ſic toto 5. ac 6. libro, c[...] quatuor magnitudines proportionales eſſe dem[...] ſtrat, nihil ſciemus aliud, quàm dictum exc[...] ſum, & defectum illis competere, incerti pla[...]*

utrum

[ſi]m magnitudines, de quibus agitur, ſint ve[re p]roportionales.

[P]roportionum æqualium aliud indicium primum & infallibile aſſignatur.

[Q]Uod ſi rationum æqualium deſideretur indicium infallibile, & facile, & primum, nos aſſignabimus, demonſtrabimuſque theor. 5. & [p]artis 2. eſtque ejuſmodi.

[R]ationes o æquales ſunt (AB ad CF, GM ad [N]Q) quando & conſequentes ipſæ, & conſe[qu]entium ſimiles partes aliquotæ quæcunque in [a]ntecedentibus æquali ſemper numero continentur. Fig. 16. o Majoris inæqualitatis.

Ut ſi una decima ipſius CF contineatur in AB [du]centies, una quoque decima NQ contineatur du[ce]nties in GM, & ſi una centeſima CF contineatur [m]illies in AB, etiam una centeſima NQ con[ti]neatur millies in GM, & ſic deinceps in infini[tu]m, erit AB ad CF, ut GM ad NQ.

Inæquales autem rationes ſunt, quando aut [co]nſequentes ipſæ, aut conſequentium aliquæ ſimi[li]s aliquotæ in antecedentibus inæquali numero [co]ntinentur. Et illa ratio major eſt, cujus vel con[ſe]quens, vel conſequentis aliquota, ſæpius conti[ne]tur in antecedente.

Ut ſi una centimilleſima CF ſæpius contineatur [in] AB, quàm una centimilleſima NQ, in GM, [e]rit ratio AB ad CF major ratione GM ad NQ, [qua]mvis innumeræ aliæ conſequentium CF, NQ [ſi]miles aliquotæ in antecedentibus AB, GM æqua[li] numero continerentur. Fig. 26.

Porrò æquali numero contineri dicuntur, cùm ablatæ, quoties poſſunt, æquali numero ſunt ablatæ.

Ex hoc indicio rationum irrationalium æqualitas & inequalitas continuò eluceſcit, cùm ſic antecedentes conſequentibus incommenſurabiles per ablata conſequentibus commenſurabilia & proportionalia exhauriantur.

7. Similes partes ſunt, quæ in ſuis totis æquè, ſeu eodem modo continentur, ut, qualis pars ſui totius eſt una, talis pars ſui totius ſit altera. Quod ſanè nihil allud eſt, quàm partes ad ſua tota eandem habere rationem.

Similes vero partes aliquotæ ſunt, quæ ſua tota æqualiter metiuntur: ut ſi utraque ſit ſui totius una tertia, una decima &c.

Fig. 6. 8. Magnitudines (A B C D) continuè proportionales dicuntur, cùm medii termini (B, C) bis ſumuntur, hoc eſt, cùm ſunt conſequens reſpectu præcedentis, & antecedens reſpectu ſequentis.

Continuas rationes ſic efferimus, A eſt ad B, ut B ad C, & B eſt ad C, ut C ad D, & ſic deinceps.

9. Magnitudines diſcretim proportionales ſunt, cùm nullus terminus bis accipitur.

Diſ-

ſcretas rationes ſic efferimus, A eſt ad B, ut C Fig. 1.
Cùm plures fuerint proportionales magni-s, quàm tres, ſi proportionales dicantur, intelligitur diſcretim.

Cùm magnitudines (ABCD) fue-ontinuè proportionales, prima (A) rtiam (C) habere dicitur rationem icatam ejus rationis, quam eadem (A) habet ad ſecundam (B). & (A) ad quartam (D) rationem ha-dicitur triplicatam ejus, quam ea-prima habet ad ſecundam (B) & ſic nceps.

11. Homologæ ſeu ſimiles ratione ma-tudines dicuntur antecedentes ante-entibus, conſequentes conſequenti-. Ut ſi A eſt ad B, ut C ad F, homo- Fig. 1. gæ erunt A, C, & B, F.

Reliquæ definitiones commodiùs ex ipſis propo-tionibus intelligentur.

Quintus liber propoſitiones complectitur 25. Ex 10. non alium uſum habent, quàm ut reliquæ rum ope per multiplices demonſtrentur. Illis igi-prætermiſſis, 15. reliquas proponemus ſolas, lidis ordine non mutato. Porrò hujus libri mata non ſolis lineis, ſed omnibus omni-antitatibus conveniunt. Lineæ igitur, qui-hic utimur, omne genus quantitatis repræ-ſent.

Axio-

Axioma.

DAtis tribus quantitatibus A, B, C, dabilis eſt quarta Z, ad quam C eam proportionem habet, quam A habet ad B.

PROPOSITIO 1. 2. 3. 4. 5. 6.

IN noſtrâ methodo ſunt ſuperfluæ.

PROPOSITIO VII.

Fig. 7. *SI quantitates A & B fuerint æquales, & alia quæpiam detur Z, erit A ad Z, ut B eſt ad Z, & Z erit ad A, ut eadem Z eſt ad B.*

Hæc propoſitio, uti & ſequentes quatuor, ſunt meriſſima axiomata, ac proinde nullo modo demonſtrari debent.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8. *SI quantitates (C & F) fuerint inæquales, major C ad tertiam Z majorem habebit rationem, quàm minor F habeat ad eandem Z.*

Et Z ad majorem C minorem habebit rationem, quàm eadem Z habeat ad F, quæ minor eſt quàm C.

PRO-

PROPOSITIO IX.

SI A & B ad Z eandem habeant rationem, æquales ſunt A & B. Fig. 7.

Et ſi eadem Z ad A & B eandem rationem habeat, rurſum A & B æquales erunt.

PROPOSITIO X.

SI C ad Z majorem rationem habeat, quàm F ad Z, erit C major quàm F. Fig. 8.

Et ſi Z ad F majorem rationem habeat, quàm eadem Z ad C, erit F minor quàm C.

PROPOSITIO XI.

RAtiones, quæ eidem rationi ſunt æquales, eædem, ſimiles, (idem omnia ſignificant) ſunt æquales, eædem, ſimiles inter ſe. Fig. 9.

Ut ſi tam ratio A ad B, quàm ratio C ad F, ſint æquales rationi X ad Z, erunt quoque rationes A ad B, & C ad F æquales inter ſe. Sive ſi A ſit ad B, ut X ad Z, & C ſit ad F, ut X ad Z, erit quoque A ad B ut C ad F.

Eodem modo rationes, quæ æqualibus ſunt æquales, inter ſe ſunt æquales.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Fig. 10. *SI ſingulæ magnitudines quotcumque (A, B, C) eandem habuerint proportionem ad ſingulas totidem (F, I, L) quam proportionem habent ſingulæ ad ſingulas, ſive una (A) ad unam (F) eandem habebunt omnes (A, B, C) ſimul ſumtæ ad omnes F, I, L) ſimul ſumtas.*

Rem per ſe manifeſtam exemplo tantùm aliquo rationali declaro; ut ſi ſingulæ A, B, C ſingularum F, I, L ſint triplæ (hoc eſt ſi ſingulæ ad ſingulas eandem habeant rationem quam 3 ad 13) etiam A, B, C ſimul ſumtæ ſimul ſumtarum F, I, L triplæ erunt, (hoc eſt, etiam A, B, C ſimul ſumtæ ad F, I, L ſimul ſumtas rationem habent eandem, quam 3 ad 1.) In proportione irrationali res æquè clara eſt.

PROPOSITIO XIII. & XIV.

IN noſtrâ methodo ſunt ſuperfluæ.

PRO-

PROPOSITIO XV.

ALiquota ſimiles (F, I) eandem inter ſe rationem habent, quam tota (A, B.) Fig. 10.

Et univerſim partes ſimiles (C, E) ſunt inter ſe ut tota (A, B.) Fig. 11.

Verè inſtar axiomatis haberi poteſt, ſi rectè intelligatur, quid ſint partes ſimiles. Vide defin. 7.

PROPOSITIO XVI.

SI prima (A) ſit ad ſecundam (B) ut tertia (C) ad quartam (F) etiam permutando erit prima (A) ad tertiam (C) ut ſecunda (F) ad quartam (F.) Fig. 11. vel 1.

Ponantur B & F eſſe minores, quàm A & C: nam ſi æquales ſint res patet. Quoniam A ponitur eſſe ad B, ut C ad F, erunt per defin. 7. B & F totorum A & C partes ſimiles, ac proinde per præced., quam proportionem inter ſe habent tota A, C, eam quoque habent partes ſimiles B, F; hoc eſt, A eſt ad C, ut B ad F.

Scho-

Scholium.

SI A eſt ad B, ut C ad E, etiam invertendo ut B ad A, ſit F ad C. Per ſe patet.

Apud Euclidem hoc eſt corollarium prop. 4. cùm in noſtra methodo tanquam ſuperflua ſit o... ſa, viſum eſt corollarium illud hoc loco ponere.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 12. *SI antecedens unum (AB) ſit ad conſequens (CB) ut antecedens alterum (FI) ad conſequens alterum (LI) etiam dividendo erit (AC) exceſſus antecedentis primi ſupra ſuum conſequens, ad idem conſequens (CB) ut (FL) exceſſus antecedentis ſecundi ſupra conſequens ſecundum, ad ſecundum conſequens (LI.)*

Axiomatis inſtar aſſumi poteſt: ſi tota AB, FI eandem rationem habeant ad X & Z, etiam ſimilibus partibus mulctata eandem ad X & Z pergent habere rationem: hoc eſt, adhuc AB ſic mulctata erit ad X, ut FI ſic mulctata ad Z. Id verò eſt quod aſſerit propoſitio. Nam ſi ponitur CB eſſe ad CB, ut FI ad LI, erunt a CB, LI ſimiles partes totorum AB, FI; & AC, FL, erunt tota ſim...

a Per def. 7. l. 5.

libus partibus mulctata. Cùm ergo tota habuerint ad CB, LI eandem rationem, etiam AC, FL (hoc eſt tota ſimilibus partibus mulctata) pergent ad CB, LI eandem inter ſe habere rationem, hoc eſt, adhuc erit AC ad CB, ut FL ad LI.

PROPOSITIO XVIII.

SI antecedens unum (AC) ſit ad conſequens unum (CB) ut antecedens alterum (FL) ad conſequens alterum (LI) etiam componendo erit (AC cum BC) primum antecedens cum ſuo conſequente ad idem conſequens (CB) ut (FL cum LI) ſecundum antecedens cum ſuo conſequente ad conſequens (LI.) Fig. 92.

Rurſum enim inſtar axiomatis aſſumi poterit: ſi duæ quantitates AC, FL eandem ad X & Z habeant rationem, etiam AC, FL ſimiliter, ſeu proportionaliter auctæ pergent ad X & Z eandem habere rationem: hoc eſt, adhuc erit AC ſic aucta ad X, ut FL ſic aucta ad Z. Id verò eſt quod propoſitio aſſerit. Nam ponitur AC eſſe ad CB, ut FL ad LI. Quare ſi ipſis AC, FL addantur CB, LI, erunt AC, FL proportiona-

liter, ſeu ſimiliter auctæ. Cùm igitur A C, F L eodem modo ſe habeant ad C B, L I, etiam cùm ſimiliter fuerint auctæ (hoc eſt ipſæ jam A B, F I) pergent ad eaſdem C B, L I eodem modo ſe habere; hoc eſt, adhuc A B erit ad C B, ut F I ad L I.

Corollarium 1.

Fig. 12. SI antecedens unum (A B) fuerit ad conſequens (C B) ut antecedens alterum (F I) ad conſequens alterum (L I) etiam antecedens primum (A B) erit ad (A C) exceſſum ſuum ſupra conſequens, ut antecedens alterum (F I) eſt ad F L) exceſſum ſuum ſupra conſequens alterum (L I.)

Cùm enim AB ſit ad C B, ut F I ad L I, erit dividendo *a* A C ad C B, ut F L ad L I: & inuertendo *b* B C ad C A, ut I L ad L F: & componendo *c* B A ad C A, ut I F ad L F.

a *Per* 17. *l.* 5. b *Per ſchol. p.* 16. *l.* 5. c *Per* 18. *l.* 5.

Hæc argumentatio vocatur converſio rationis.

Corollarium 2.

Fig. 12. SI A C eſt ad A B, ut F L ad F I, erit quoque A C ad C B, ut F L ad L I, & A B ad C B, ut F I ad L I.

Cùm

Cùm enim ſit, ut A C ad A B, ſic F L ad F I, erit invertendo B A ad C A, ut I F ad L F: & dividendo *d* B C ad C A, ut I L ad L F: & rurſum invertendo A C ad C B, ut F L ad L I: & componendo *e* A B ad C B, ut F I ad L I.

d *Per* 17. *l.* 5.

e *Per* 18. *l.* 5.

PROPOSITIO XIX.

SI ut totum (A B) eſt ad totum (F I) ita ablatum (C B) ſit ad ablatum (L I) etiam ut totum eſt ad totum, ita reliquum (A C) erit ad reliquum (F L.) Fig. 12.

Omnino clarum eſt per ſe. Poteſt tamen ex præcedentibus ſic oſtendi: quoniam A B eſt ad F I, ut C B ad L I, erit permutando *a* A B ad C B, ut F I ad L I. Ergo per converſionem rationis A B eſt ad A C, ut *b* F I ad F L. Ergo permutando *c* ut A B ad F I, ita A C ad F L.

a Per 16. *l.* 5.

b Per *corol. præced.*

c *Per* 16. *l.* 5.

PROPOSITIO XX. XXI.

IN noſtrâ methodo ſunt ſuperflua.

PROPOSITIO XXII.

SI fuerit A ad B, ut O ad Q, & B ad C, ut Q ad R, & ſic deinceps, erit ex Fig. 13.

æquo ut A prima ad C ultimam, itá O prima ad ultimam R.

Ponatur C, R eſſe minores quàm B, Q: eadem foret oſtenſio, ſi majores ponerentur. Quoniam *a* B eſt ad C, ut Q ad R, erunt C, R totorum B, Q *b* partes ſimiles. Cùm igitur A, & O ad B & Q eandem habeant rationem, habebunt quoque ad C & R, quæ ſunt ipſorum B, & Q partes ſimiles, eandem rationem. Inſtar enim axiomatis eſt, ſi duæ quantitates ad alias duas eandem inter ſe habuerint rationem, etiam ad partes earum ſimiles eandem inter ſe habere rationem.

a *Per hyp.*
b *Per defin. 7 l. 5.*

Si plures fuerint utrimque quantitates quàm tres, eodem ratiocinio procedatur ad reliquas.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 14.

SI fuerit ut A prima ad B ſecundam, ita O prima ad Q ſecundam, & ut B ſecunda ad primam O, erit ex æquo ut A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q ſecundam.

Ut B eſt ad C, ita *o* poteſt O eſſe ad aliam quampiam S. Jam quia, ut B ad C, ſic

o *Per ax. ante 1. l. 5.*

p R

p R eſt ad O, & ut B ad C *q* ſic Q eſt ad S, erit R ad Q, *a* ut Q ad S. Igitur permutando *b* R eſt ad Q, ut O ad S. Deinde, quia O eſt ad Q, ut *f* A ad B, & Q eſt ad S, *i* ut B ad C, ex æquo erit O ad S, ut *c* A eſt ad C. Sed jam oſtendi R eſſe ad Q, ut O eſt ad S. Ergo etiam *d* R eſt ad Q, ut A ad C.

p Per hyp. q Per conſtr. a Per 11. l. 5. b Per 16. l. 5. Per hyp. i Per conſtr. c Per præc. d Per 11. l. 5.

Vocatur à Geometris hæc ratio perturbata.

PROPOSITIO XXIV.

SI fuerit ut A ad B, ita C ad F; & ut I ad B, ita L ad F: erit ut A cum I ad B, ita C cum L ad F. Fig. 15.

Quoniam I per hyp. eſt ad B, ut L ad F, erit quoque *a* invertendo B ad I, ut F ad L. Cùm igitur A ſit ad B, *b* ut C ad F, & B ad I, ut F ad L, ex æquo erit *c* ut A ad I, ſic C ad L. Igitur *d* componendo ut AI eſt ad I, ſic CL eſt ad L: I verò eſt ad B, *e* ut L ad F. Rurſum igitur *f* ex æquo AI eſt ad B, ut CL ad F.

a Per ſchol. p. 10. l. 5. b Per hyp. c Per 22. l. 5. d Per 18. l. 5. e Per hyp. f Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XXV.

SI quatuor magnitudines (AB, CF, IL) fuerint proportionales, maxima (AB) & Fig 16.

 ni-

minima (*L*) *duabus reliquis* (*CF*, *I*) *majores erunt.*

Sit A B ad C F, ut I ad L. Ex maximâ A B ſumatur A Q æqualis I; & ex C F ſumatur CR par minimæ L. Erit igitur AB tota ad totam C F, ut ablata A Q ad ablatam C R. Ergo reliqua Q B eſt ad reliquam *a* R F, ut tota AB ad totam C F. Sed A B major *b* eſt quàm C F. Ergo & Q B major quàm R F. Jam verò quia A Q ipſi I, & C R ipſi L æquales ſunt, etiam A Q cum L ipſi I cum C R æquales erunt. Quare ſi ad A Q cum L addatur majus Q B, & ad I cum C R addatur minus L F, erit totum A Q B cum L majus toto I cum C R F. Quod erat demonſtrandum.

a *Per* 19. *l.* 5.
b *Per hyp.*

Quæ ſequuntur, non ſunt propoſitiones Euclidis, ſed ex Pappo Alexandrino aliiſque deſumptæ ob frequentem earum uſum Euclidæis ſubjungi ſolent.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 17.

SI *prima* (*A*) *ad ſecundam* (*B*) *majorem rationem habeat, quàm tertia* (*C*) *ad quartam* (*F*) *habebit invertendo* (*B*) *ſecunda ad* (*A*) *primam minorem rationem, quàm* (*F*) *quarta ad* (*C*) *tertiam.*

Quo-

Quoniam ponitur A habere ad B majorem rationem, quàm C ad F. Igitur A ad *o* aliquam B X (quæ *a* major erit quàm B) eandem habebit rationem, quam C ad F. Invertendo igitur erit B X ad A, ut F ad C, ac proinde *b* B ad A in minori ratione erit, quàm F ad C.

o *Per ax. ante* 1. *l.* 5.
a *Per* 10. *l.* 5.
b *Per* 8. *l.* 5.

PROPOSITIO XXVII.

SI A habet ad B majorem rationem, quàm C ad F, etiam permutando A ad C majorem rationem habebit, quàm B ad F. Fig. 17.

Quoniam ratio A ad B ponitur major ratione C ad F, erit *o* ratio A ad aliam B X (quæ neceſſariò major eſt quàm *a* B) æqualis rationi C ad F. Jam igitur *b* permutando A erit ad C, ut B X ad F. Sed B X ad F eſt in majori ratione, *c* quàm B ad F. Ergo etiam A eſt ad C in majori, quàm B ad F.

o *Per ax. ante* 1. *l.* 5.
a *Per* 10. *l.* 5.
b *Per* 16. *l.* 5.
c *Per* 8. *l.* 5.

Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXVIII.

SI A B ad B C majorem rationem habet, quàm F I ad I L, etiam componen- Fig. 18.

do AC ad BC majorem rationem h[...]
quàm FL ad IL.

Quoniam ponitur AB ad BC eſſ[...]
o Per ax. ante 1. l. 5. majori ratione, quàm FI ad IL. Er[...]
a Patet ex 10. l. 5. alia QB (quæ neceſſariò erit minor[...]
quàm AB) eſt ad BC, ut FI ad IL.
b Per 18. l. 5. go *b* componendo OC eſt ad BC, [...]
c Per 8. l. 5. L ad IL. Ergo AC eſt ad BC in *c* maj[...]
quàm FL ad IL.

Idem ſimiliter demonſtrabitur de propor[...]
minori.

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 18. *SI AC ad BC majorem rationem ha[...]*
quàm FL ad IL, etiam dividendo A[...]
BC majorem habet rationem, quàm FI ad [...]

Quia ponitur AC ad BC majorem [...]
bere rationem, quàm FL ad IL; e[...]
o Per ax. ante 1. l. 5. *o* alia OC (quæ neceſſariò minor erit[...]
a Per 10. l. 5. quàm AC) erit ad BC, ut FL ad I[...]
Jam igitur erit dividendo *b* OB ad BC, u[...]
b Per 17. l. 5. FI ad IL. Ergo AB eſt ad BC in *c* majo[...]
c Per 8. l. 5. ri, quàm FI ad IL.

Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportio[...]
minori.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

A C ad B C majorem rationem habet, quàm F L ad I L, convertendo habebit A C A B minorem, quàm F L ad F I. Fig. 18.

Quoniam A C eſt ad B C in majori, quàm F L ad I L, erit dividendo *a* A B ad B C in majori, quàm F I ad I L. Ergo invertendo *b* C B ad B A eſt in minori, quàm L I ad I F. Ergo componendo *c* C A eſt ad B A in minori, quàm L F ad I F.

a Per 29. l. 5.
b Per 26. l. 5.
c Patet ex 28. l. 5.

PROPOSITIO XXXI.

SI A B ad C majorem rationem habeat, quàm F ad I; & C ad L Q majorem rationem habeat, quàm I ad S, & ſic deinceps; etiam prima A B ad ultimam L Q majorem rationem habebit, quàm prima F ad ultimam S. Fig. 19.

Quoniam A B eſt ad C in majori, quàm F ad I; Ergo alia *o* quæpiam O B (quæ neceſſariò minor *a* erit quàm A F) eſt ad C, ut F ad I. Et quia C eſt ad L Q in majori quàm I ad S; Ergo C ad aliam quampiam R (quæ erit neceſſariò major quàm L Q)

o Per ax.
a Per 10. l. 5.

c Per 22. l. 5. eſt ut I ad S. Igitur ex æquo *c* O B eſt a LR, ut F ad S. Ergo O B eſt ad L Q i majori quàm *d* F ad S. Ergo A B eſt ad Q *e* in multò majori, quàm F ad S.

d Per 8. l. 5.

e Per eand.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 19. *SI A B ad C majorem rationem habet, quà I ad S, & C ad L Q majorem quàm F I, etiam ex æquo habebit majorem ratio A B ad L Q, quàm F ad S.*

Demonſtratio eadem quæ præcedentis, ſed pro 22. citetur 23.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 12. *SI tota (A B) ad totum (F I) majorem rationem habuerit, quàm ablata (C B) ad ablatam (L I) tota ad totam minorem rationem habebit, quàm reliqua (A C) ad reliquam (F L.)*

Quia A B eſt ad F I in majori, quàm C ad L I; erit *a* permutando etiam A B CB in majori quàm F I ad L I. Ergo con vertendo *b* AB eſt ad AC in minori, quà FI ad F L. : Ergo etiam permutando *c* A eſt ad FI in minori, quàm AC ad FL.

a Per 27. l. 5.

b Per 30. l. 5.

c Patet ex 27. l. 5.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

SI rationes (A ad C, & E ad O) ſunt æqualium rationum (A ad B & E ad F) duplicatæ, aut triplicatæ, & ſic deinceps, æquales ſunt etiam ipſæ. Fig. 10.

Quia ratio A ad C duplicata eſt rationis A ad B, erit *a* ut A ad B, ſic B ad C. a Per defin. 10. *l.* 5. Ob eandem cauſam erit ut E ad F, ſic F ad O. Cùm ergo ſit ut A ad B, ſic per hyp. E ad F, & ut B ad C, ſic F ad O (nam ut B ad C, ſic A ad B, hoc eſt ad F, hoc eſt F ad O) igitur *b* ex æquo erit, ut b Per 22. *l.* 1. A ad C, ſic E ad O.

PROPOSITIO XXXV.

RAtiones æquales A ad C & E ad O ſint duplicatæ, aut triplicatæ, & ſic deinceps, rationum A ad B, & E ad F, etiam hæ æquales erunt. Fig. 20.

Si negas, ſit ut A ad B, ſic E ad aliam Z inæqualem ipſi F, & fiat ut E ad Z, ſic Z ad X. Quoniam igitur rationum æqualium A ad B, & E ad Z duplicatæ *c* ſunt c Per defin. 10. *l.* 5. rationes A ad C, & E ad X, etiam ratio E ad X æqualis erit *d* rationi A ad C, d Per præc. hoc

e per 9. l. 5. hoc eſt per hyp. rationi E ad O. Ergo e quantur O & X. Ergo patet etiam m dias F & Z æquales eſſe. Ergo A eſt a B, ut E ad F ſeu Z. Quod erat demon ſtrandum.

Ex contradictorio aſſertionis directè illa eſt aſſertio.

PARS SECUNDA.

Euclidæa per multiplices definitio æqualium ra tionum demonſtratur exhibeturque, ac demonſtratur aliud magis immediatum, & facilius indicium æqualitatis rationum.

P*Roportionum elementis methodo (niſi fallor) commodiori explicatis, reliquum eſt, ut, quod ſecundo loco ſuprà promiſeram, præſtare aggrediar. Hoc igitur loco (quod à nullo hactenus factum eſt) demonſtrabimus, nihil aſſumendo, niſi quod per ſe lumine naturali ſit manifeſtum, duas rationes inter ſe æquales eſſe, quando antecedentium quælibet æquè multiplices conſequentium æquè multiplicibus ſemper ſunt vel pariter majores vel pariter minores, vel pariter æquales. Cujus quidem negotii cùm ſatis ardua, atque prolixa ſit demonſtratio, ut jam re ipſâ cognoſcemus, facilè apparebit præpoſterè egiſſe Euclidem, qui æqualitatis rationum primum & fundamentale indicium ſumi voluit ab hac multiplicium indemon-*

ſtra-

[..]tâ hactenus proprietate, cujus tam remota [..] obſcura ſit cum rationum æqualitate conne[..]o.

Lemma 1.

[S]i A ad B, ut C ad F; & ſint antecedentium A, C quælibet æquè multiplices I, Q, nimi[ru]m vel duplæ, vel triplæ, & ſic deinceps. Sint [ite]m conſequentium B, F quælibet æquè multi[pl]ices L, R. Fig. 21.

Erit quoque ut I ad L, ſic Q ad R.

Quoniam enim A eſt ad B, ut C ad F, etiam I [du]pla ipſius A erit ad B, ut Q dupla ipſius C eſt ad F: & I tripla A erit ad B, ut Q tripla C ad F. Et ſic in infinitum. Quod quidem æquè eſt per ſe clarum ac quodlibet axioma. Quoniam igitur I [e]ſt ad B, ut Q ad F, erit quoque I ad duplam [ip]ſius B, ut Q ad R duplam ipſius F; & ut I ad L triplam ipſius B, ita Q ad K triplam F: Et ſic in infinitum, quod rurſus tam clarum eſt, [q]uàm axioma quodcunque. Liquet ergo propoſi[t]um.

Lemma 2.

SI quantitates A, B habeant communem menſuram C; erit A toties ſumta, quoties eſt C in [B], æqualis quantitati B toties ſumtæ, quoties C [eſt] in A. Fig. 22.

Ponatur C contineri in B quater, & in A ſexies, ac proinde B eſſe 4. C, & A eſſe 6. C. Igi[tu]r 6. C (hoc eſt A) ducta in 4. C (hoc eſt toties [ſu]mta, quoties C eſt in B) efficiunt 24. C. Similiter

ter 4. C (*hoc eſt B*) *ducta in* 6. C (*hoc eſt to*... *ſumta, quoties* C *eſt in A*) *efficiunt etiam* 24. ... *Ergo A toties ſumta, quoties C in B, æquatur B* ... *ties ſumtæ quoties C in A.*

Theorema I.

Fig. 23. **S**I *ratio A B ad F I major ſit ratione L* ... *R, tales ſumi poſſunt antecedentium* (*A* ... *& L*) *æquè multiplices, tales item æquè* ... *tiplices conſequentium* (*F I, & R*) *ut* ... *tiplâ antecedentis A B rationis majoris exc*... *dente multiplam conſequentis* (*F I*) *multipl*... *antecedentis L rationis minoris non exced*... *multiplicem ſui conſequentis* (*R.*)

Sit ratio A B ad F I major ratione L ad R, ... *ſint AB, & L majores rationum termini. Quonia*... *igitur A B ad F I majorem habet rationem, qu*... a Per ax. ante 1. l. 5. *L ad R, alia quædam quantitas Z* a *habebit ad F I* ... *eandem rationem, quam L ad R. Quia jam igitur ratio Z ad F I æqualis eſt rationi L ad R, ponitur*-*que ratio A B ad F I major ratione L ad R, erit quoque ratio A B ad F I major ratione Z ad F I, ac proinde A B major eſt quàm Z: quæ omnia p*... *ſe ſunt manifeſta. Igitur ex AB ſumi poterit A*... *per Z, eritque etiam A C ad F I, ut L ad R. A*... *feratur reſiduum B C ex A B quoties poteſt, p*... *ter; tum ſeca AC in tot æquales partes, ex. gr.,* ... *6., donec earum una poſſit auferri ſæpius ex F I* ... *quàm B C ex A C, puta quater, & reſidu*... *eſto O I, quod erit minus unâ particulâ. Hoc quo*-

qu...

fieri poſſe per ſe eſt manifeſtum, & patet ex p. 10. quæ à proportionibus non dependet. Particularum verò illarum quantitas eſto Q.

Quoniam igitur Q eſt menſura communis quantitatum AC, FO, ergo AC toties ſumta, quoties eſt in FO, nempe quater, æquatur EO toties ſumtæ, quoties Q eſt in AC, nempe ſexies. Deinde quia reſiduum OI eſt minus unâ particulâ, hoc eſt quàm Q, erit OI toties accepta, quoties Q eſt in AC, nempe ſexies, adhuc minor quàm AC. Ulterius, quia BC minus ſæpe auferri poteſt ex AO, quàm Q ex FI (poſitum quippe fuit BC ex AC auferri tantùm poſſe ter, Q verò quater ex FI) manifeſtum eſt BC toties ſumtum, quoties Q in FI, nempe quater, majus fore quàm AC, & proinde multò majus eſſe quàm AC. Atqui oſtenſum eſt AC ſumtum quater, & FO ſumtum ſexies eſſe æqualia. Quare ſi AC ſumto quater addatur BC quater, & ad FO ſexies ſumtum addatur OI ſexies, erunt 4. AC & 4. BC, hoc eſt 4. AB majora, quàm 6. FO & 6. OI, hoc eſt quàm 6. FI. Quia verò 4. AC æqualia erant 6. FO, erunt 4. AC minora 6. FI. Sed ut AC ad FI, ita ponebatur ſuprà L eſſe ad R. Ergo per lem. 1. etiam 4. L minora ſunt quàm 6. R. Acceptæ ſunt igitur antecedentium AB, & L æquè multiplices conſequentium FI & R, nempe ſecuplæ, & tamen oſtenſum eſt multiplam antecedentis AB (nempe 4. AB) ſuperare multiplicem conſequentis FI (nempe 6. FI) multiplicem verò antecedentis L (nempe 4. L) non excedere multiplicem conſequentis R (nempe 6. R) Quod erat demonſtrandum.

Theo-

Theorema 1.

Fig. 21. *SI antecedentium (A, C) qualibet æquè multiplices quibuſlibet conſequentium (B, F) æquè multiplicibus ſint vel ſimul majores, vel ſimul æquales, ratio (A ad B) rationi (C ad F) æqualis erit.*

Si negas, ſit ratio A ad B major ratione C ad F. Ergo per theor. præced. poterunt antecedentium A, C ſumi tales æquè multiplices, item tales conſequentium B, F æquè multiplices, ut, multipla antecedentis A excedente multiplam conſequentis B, multipla antecedentis C non excedat multiplam conſequentis F, quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim. Ergo &c.

In hac demonſtratione, uti & in ſequentibus eæ ſolùm propoſitiones ex quinto libro adhibentur, quæ per ſe æquè ſunt manifeſtæ, atque ipſa axiomata.

Theorema 3.

Fig. 24. *SI ſumi poſſint antecedentium (O, R) tales æquè multiplices, itemque tales æquè multiplices conſequentium (Q, S) ut multipla antecedentis unius (O) ſuperante multiplam conſequentis (Q) multipla antecedentis alterius (R) non excedat multiplam ſui conſequentis (S) erit ratio (O ad Q) cujus ante-*

tecedentis multiplex ſuperat multiplicem con- ſequentis, major ratione alterâ (R ad S.)

Rationes illas inæquales eſſe ſic oſtendo. Si eſſent æquales, quæcunque antecedentium æquè multiplices (ut patet à fortiori ex lemmate primo) quibuſcunque æquè multiplicibus conſequentium vel ſimul majores eſſent, vel ſimul minores, quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim.

Quòd autem Ratio O ad Q major ſit, cujus antecedentis multiplex ſuperat, ſic oſtendo. Si negas, ſit ratio R ad S major ratione O ad Q. Ergo per theor. 1. *tales accipi poſſunt antecedentium R & O æquè multiplices, taleſque item æquè multiplices conſequentium S & Q, ut multiplâ antecedentis R rationis majoris excedente multiplam conſequentis S, multipla antecedentis O non excedat multiplam conſequentis Q: non autem tales (quod facilè ex* 1. *lem. oſtenditur) ut multiplâ O excedente multiplam Q multipla R non excedat multiplam S. Quod eſt abſurdum, cùm evertat hypotheſim.*

Theorema 4.

Cum proportio irrationalis eſt, nulla multiplex antecedentis ulli conſequentis multiplici æqualis eſſe poteſt. Quare, cùm per multiplices inquiritur proportionum irrationalium æqualitas, ſolummodo multiplicium ſimultaneus exceſſus defectuſque ſpectari debent. Fig. 25.

 Sit

Sit proportio irrationalis A ad B. Si A aliquoties ſumta poſſet fieri æqualis B aliquoties ſumtæ, ac proinde eandem ambæ efficere quantitatem Z, ſingulæ A & B eſſent eidem Z commenſurabiles, ac proinde & commenſurabiles inter ſe, contra hypotheſim.

Quia tamen ſecundum theorema tam ad rationales proportiones pertinet, quàm ad irrationales, ſimultaneo exceſſui & defectui æqualitatem ſimultaneam addidimus cum Euclide.

Demonſtratis hunc in modum, quæ ab Euclide def. 5. & 6. ponuntur, jam omnes ejus quinti & ſexti libri demonſtrationes ſubſiſtunt, patetque, multiplicium illum exceſſum defectumque ſimultaneum infallibile indicium eſſe æqualitatis rationum, non quidem per ſe immediatè, ſed demonſtratione, quam modo dedimus, priùs ritè intellectâ.

Verùm quia indicium per multiplices, quantumvis jam ſecurum, nihilominus remotum eſt & implexum, hîc aliud clariſſimum & proximum, quod promiſi ſuprà, demonſtrabo.

Theorema 5.

Fig. 26. *SI conſequentes (CF, NQ) & conſequentium quælibet aliquota ſimiles (puta & deci-*

cima, & centeſima, & milleſima, & ita deinceps ſine termino) in antecedentibus (A B, G M) æquali ſemper numero contineantur, rationes (A B ad C F, & G M ad N Q) æquales erunt.

Nota, æquali numero contineri dicuntur, cùm, ſi auferantur quoties poſſunt, æqualis eſt utrimque numerus ablatarum.

Demonſtr. Si negas, erit ratio alterutra, puta AB, ad CF, major ratione GM ad NQ. Quoniam igitur A B ponitur ad C F majorem habere rationem quàm G M ad N Q, manifeſtum eſt aliquam (puta AD) minorem quàm AB, æqualem habere rationem ad CF, quam GM ad N Q. Manifeſtum ſimiliter eſt, aliquam ipſius C F aliquotam (ex gr. unam trigeſimam) eſſe minorem differentiâ D B. Sit C E una trigeſima ipſius C F, & auferatur ex A B quoties poteſt, ex. gr., millies, totumque ablatum ſit AO. Quoniam igitor A O eſt 1000 C E, & C F eſt 30 C E, erit A O ad C F, ut 1000 ad 30.

Sumatur jam ex N Q aliquota N P, ſimilis alteri CE, nempe etiam una trigeſima. Quoniam ex hyp. C E, N P æquali numero in A B, G M continentur, & C E ablata ex A B quoties potuit, ablata fuït millies, etiam N P ex G M auferri poterit millies. Quia ergo totum ablatum G K eſt 1000 N P, & NQ eſt 30 N P, erit G K ad N Q, ut 1000 ad 30, hoc eſt, ut A O ad C F. Quia verò C E ablata ex A B quoties potuit reliquit O B, erit O B minus quàm C E. Sed C E, nempe una trigeſima C F, eſt minor poſita quàm D B. Ergo O B eſt multò minor quàm D B. Ergo

AO eſt major quàm A D. Ergo A O ad C F majorem rationem habet quàm A D ad C F. Sed ponebātur eſſe A D ad C F, ut G M ad N Q. Ergo A O ad C F majorem rationem habet, quàm G M ad N Q: hoc eſt multò majorem quàm G K ad N Q. Quod eſt abſurdum, quia oſtendi ſuprà A O eſſe ad C F ut G K ad N Q. Non poſſunt igitur rationes datæ AB ad CF & GM ad NQ eſſe inæquales. Æquales igitur ſunt. Quod erat demonſtrandum.

Theorema 6.

Fig. 26. *SI aut conſequentes (CE, NQ) aut conſequentium aliquæ ſimiles aliquotæ (ex. gr. decimæ) inæquali numero in antecedentibus (AB, GM) contineantur, rationes (A B ad C F, & G M ad NQ) inæquales erunt, & erit illa major, cujus conſequentis aliquota ſæpius continetur.*

Contineatur C E, decima una ipſius C F, in AB millies, & ſit A O 1000 *C E; tum vero reſiduum O B erit minus quàm una C E. Deinde N P, una decima N Q, contineatur in G M tantùm nongenties nonagies ſepties, & ſit G K* 997 *N P; patet reſiduum K M fore minus unâ NP, ac proinde* 1000 *N P fore majores quàm G M. Sit ergo G R* 1000 *N P. Quoniam igitur A O eſt* 1000 *C E, & G R* 1000 *N P; C F verò* 10 *C E, & N Q* 10 *N P, erit A O ad C F, ut G R ad NQ. Ergo A B eſt ad C F in majori ratione, quàm G R ad N Q; ac proinde in multò majori, quàm*

quàm G M ad N Q. Quod erat demonſtrandum.

Habemus jam igitur indubitatum facillimumque indicium, ex quo rationes æquales inæqualeſque certò liceat diſcernere. Et poſſemus ex illo omnes, quæ quidem axiomata non ſint, l. 5. propoſitiones, quas per multiplices Euclides demonſtrat, multò expeditiùs demonſtrare, niſi magis ex uſu diſcentium putaremus, illas eâ methodo, quâ in primâ parte uſi jam ſumus, proponere.

TERTIA PARS.

De proportionum denominatoribus, logarithmo, compoſitione.

I.

Proportionis Diviſio.

PRima diviſio eſt in rationalem & irrationalem, ut dictum def. 4. Utraque dividitur in rationem æqualitatis & inequalitatis. Ratio inæqualitatis dividitur in rationem majoris inæqualitatis, quæ habet antecedens majus conſequente, & in rationem minoris inæqualitatis, quæ habet antecedens minus conſequente.

Rationalis proportio inæqualitatis majoris divi-

ditur in quinque ſpecies, quæ ſunt; multiplex, ſuperparticularis, ſuperpartiens, multiplex ſuperparticularis, multiplex ſuperpartiens.

Ratio multiplex eſt, quando major minorem aliquoties continet, ut bis, ter, quater, &c. diciturque ratio dupla, tripla, quadrupla.

Ratio ſuperparticularis eſt, quando major minorem continet ſemel, & unam ejus partem aliquotam: ut ratio 3 ad 2, vel 6 ad 4, quæ dicitur ſeſquialtera, quia major minorem continet ſemel & ejus dimidium: ratio 4 ad 3 ſive 16 ad 12 quæ dicitur ſeſquitertia, quia major minorem continet ſemel, & tertiam ejus partem, & ſic deinceps.

Ratio ſuperpartiens eſt, cùm major minorem continet ſemel, & plures ejus aliquotas, non conficientes unam aliquotam. Talis eſt ratio 8 ad 5, vel 14 ad 10, quia 8 continet 5 ſemel, & inſuper 3, hoc eſt tres quintas ejuſdem numeri 5, quæ tamen ſimul ſumtæ non conficiunt unam aliquotam ipſius 5. Similiter 14 continet 10 ſemel & bis 2, hoc eſt duas quintas numeri 10, quæ tamen ſimul ſumtæ (nempe 4) non conficiunt unam aliquotam ipſius 10. Additur porrò, non conficientes unam aliquotam, quia aliàs eſſet ratio ſuperparticularis.

Ratio multiplex ſuperparticularis eſt, cùm major minorem aliquoties continet, & inſuper unam ejus aliquotam, ut ratio 5 ad 2, 10 ad 4 &c.

Ratio multiplex ſuperpartiens eſt, cùm major minorem aliquoties continet, & adhuc plures ejus aliquotas non conficientes unam aliquotam, ut ratio 8 ad 3, 16 ad 6 &c.

II.

De Denominatore Proportionis rationalis.

DEnominator proportionis rationalis eſt, qui diſtinctè & clarè exprimit habitudem unius numeri ad alterum, ſive qui ita ſe habet ad unitatem, ut major ad minorem, ac proinde oſtendit, quoties major minorem contineat, & quoties minor contineatur à majore. Rationis 27 ad 9 denominator eſt 3, quia 3 ita eſt ad unitatem, ut 27 ad 9, ac proinde oſtendit, quoties conſequens in antecedente contineatur, nempe ter.

Cujuſcunque rationis denominator invenitur, ſi major terminus dividatur per minorem, nam quotiens diviſionis erit denominator. Ratio eſt, quia quotiens ita eſt ad unitatem, ut dividendus ad diviſorem, hoc eſt ut major ad minorem.

Exempl. detur ratio 60 ad 6. Divide 60 per 6, quotiens 10 eſt denominator. Detur rurſum ratio 60. ad 16, diviſo 60 per 16 fit quotiens $3\frac{3}{4}$, *hic eſt denominator.*

III.

De Denominatoribus Proportionum irrationalium.

CUm rationes irrationales fuerint reductæ ad rationes commune conſequens habentes, communis conſequentis antecedentia erunt rationum de-

denominatores, & commune conſequens mu[nus]… ac locum explet unitatis.

Proportionis nullius irrationalis, ſi ſola ſit, exhiberi poteſt denominator. At ſi duæ fuerint, v[el] plures proportiones irrationales, alio quodam ſen[-] ſu earum denominatores poterunt exhiberi, q[ui] nimirum oſtendant, quomodo una ratio ad alter[am] ſe habeat. Id quod egregiè obſervavit P. Gregori[us] à S. Vincentio, operis ſui Geometrici lib. 8. def. [1]. Qui vir, cùm præclariſſimis, & propè innumer[is] inventis Geometriam auxit, tum inprimis libr[o] 8. ejuſdem operis de proportionalitatibus ita ſcri[p]ſis, ut novam de proportionalitatibus ſcientiam condidiſſe cenſeri meritò debeat. Datæ ſint rationes
Fig. 27. *irrationales A ad B & C ad D, quæ revocentur ad rationes F H, habentes commune conſequens H, ſic ut ratio F ad H ſit par rationi A ad B, & ratio C ad D par rationi G ad H; commune conſequens H munus explebit unitatis, & antecedentia F, G erunt denominatores rationum F ad H & G ad H (hoc eſt rationum A ad B, & C ad D) quia oſtendunt quomodo una ratio ſeſe habeat ad alteram, ſicuti enim F eſt ad G, ita ratio F H eſt ad rationem GH, hoc eſt ratio AB ad rationem CD.*

IV.

Axiomata.

Fig. 28. AX. I. *Ratiines (F ad H, & G ad H) commune habentes conſequens (H) eam inter ſe proportionem habent, quam antecedentia (F, G.). Eſt prop. 2: P. Gregorii à S. Vinc. l. 8. quadr.*

Hoc

Hoc eſt, ratio G ad H tantò major eſt ratione ad H, quantò G major eſt quàm F.

Ax. 2. Rationes (I ad L & I ad M) commune Fig. 28.
entes antecedens, reciprocam inter ſe habent ſequentium proportionem. Eſt propoſ. 7. P. gorii à S. Vinc. lib. 8. quadr.

Hoc eſt, ratio I ad L eſt ad rationem I ad M, ut procè eſt M conſequens ad conſequens L: ſive io I ad L tantò major eſt ratione ejuſdem I ad M, antò M fuerit major quàm L.

Ax. 3. Rationes rationales eam inter ſe ratio- Fig. 1.
em habent, quam denominatores. Patet ex ax. 1.

Dentur ratio 12 ad 3, & ratio 15 ad 6, quarum denominatores ſunt 4 & 2 ½. Ex defin. a de- a Num. 2.
nom. ratio 12 ad 3 eſt eadem cum ratione 4 ad 1, & ratio 15 ad 6 eſt eadem cum ratione 2 ½ ad 1. Sed ratio 4 ad 1 eſt ad rationem 2 ½ ad 1, ut b 4 b Per ax.
ad 2 ½. Ergo etiam ratio 12. ad 3 eſt ad ratio- 1. hîc.
nem 15 ad 6. ut denominator 4 eſt ad denominatorem 2 ½.

V.

Rationum rationalium Additio & Subtractio.

ADditio perficitur, ſi rationum denominatores addantur. Ratio enim, quam habet denominatorum ſumma ad unitatem, eſt rationum datarum ſumma quæſita.

Dentur rationes 12 ad 3 & 15 ad 6, earum de- Fig. 30.
nominatores 4 & 2 ½ additi ſibi mutuò faciunt 6 ½. Ratio 6 ½ ad 1 eſt par rationi 12 ad 3

& rationi 15 ad 6. Patet ex Ax. 1. &

Subtractio fit ablatione minoris denomina-ris à majore, nam ratio reſidui ad unitatem eſt ra-tio, quæ remanet poſt minorem rationem à maj- detractam. Patet ex ax. 1. & 3.

Dentur rationes 12 ad 3, & 15 ad 6. Har- denominatores ſunt 4 & $2\frac{1}{2}$. Aufer minorem $2\frac{1}{2}$ majori 4. remanent $\frac{1}{2}$: ratio $\frac{1}{2}$ ad 1, eſt ea remanet, ubi rationem 15 ad 6 ſeu $2\frac{1}{2}$ ad 1 traxeris ex ratione 12 ad 3, ſeu 4. ad 1.

VI.

Rationum irrationalium Additio & Subtractio.

Fig. 31. RAtiones datæ (A ad B, & C ad D) ducantur ad rationes (F ad H & G H) habentes commune conſequens (H.) An-cedentia F & G ſibi addita ſunt FG. Ra-tio FU ad H eſt ſumma rationum F ad H, & G ad H, hoc eſt rationum A ad B & C ad D. Patet ex ax. 1.

Subtractio perficitur, ſi rationes datæ a commune conſequens reducantur, ac tum mi-nus antecedens G auferatur à majori F; ra-tio enim reſidui ad H eſt ea, quæ reman poſtquam rationem G ad H, ſeu C ad D ſu-traxeris à ratione F ad H, ſeu A ad B. Pa-tet ex 1. ax.

VI

VII.

Rationum rationalium Multiplicatio & Diviſio.

Enominatores rationum per invicem multiplicati dabunt denominatorem rationis, quæ datarum rationum multiplicatione produci-

Hoc eſt, ratio, quam ad unitatem habet nume- ex denominatorum multiplicatione productus, ea, quæ fit ex rationum multiplicatione. Pa- ex Ax. 1 & 3. Nam multiplicatio rationum unius ad alteram additio ſæpius repetita. Hanc item perfici repetitâ ſæpius antecedentium addi- ne (hoc eſt multiplicatione) patet ex jam cita- ax. 1. & 3.

Sint datæ rationes, 9 ad 3, & 20 ad 4, deno- minatores 3 & 5 multiplicati faciunt 15. Ratio ad 1 eſt ea, quæ ex multiplicatione rationum ad 3 (ſeu 3 ad 1) & 20 ad 4 (ſeu 5 ad 1) pro- citur. Fig. 32.

Diviſio rationum perficitur, ſi denominator majoris dividatur per denominatorem minoris. Iam ratio quotientis ad unitatem eſt ea, quæ ha- tur ex diviſione rationis datæ majoris per ratio- m minorem. Patet ex 1 & 3 axiomate. Cùm tionis per rationem diviſio ſit ſubtractio unius ab terâ ſæpius repetita.

VIII.

VIII.

Multiplicatio rationum irrationalium.

Fig. 7. *DAtæ ſint rationes A ad B, & C ad D, per invicem multiplicandæ. Fiat ut A ad B, ita D ad E. Ratio C ad F eſt ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D.*

Hæc operatio eſt Gregorii à S. Vincentio, lib. 8. prop. 75. Sed eam nec ipſe, nec alius quiſquam demonſtrat.

Hunc igitur in modum demonſtrabitur. Ratio C ad E producitur ex multiplicatione rationum C ad D, & D ad E, ut patet ex demonſtratione numeri 12, ab his independente. Sed rationes C ad D, & D ad E per conſtr. ſunt rationes C ad D & A ad B. Ergo ratio C ad E eſt ea, quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Quod erat demonſtrandum.

IX.

Diviſio rationum irrationalium.

Fig. 33. *DAta ſit ratio C ad E dividenda per rationem A ad B. Fiat ut A ad B, ſic ad D. Ratio D ad E eſt quotiens.*

Nam ratio C ad D (hoc eſt per conſtr. ratio A ad B) multiplicata per rationem D ad E producit rationem C ad E, ut patebit ex demonſtratione num. 12, ab his independente. Ergo rat[illegible]

o D ad E eſt quotiens, cùm multiplicata in di-
rem, qui eſt ratio A ad B, reſtituat rationem
d E, quæ proponebatur dividenda.

X.

De Compoſitione rationum. Ejus Definitio.

Atio ex rationibus componi dicitur, cùm ra-
tionum quantitates (hoc eſt denominatores)
er ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem.
 definitio 5. l. 6. Euclidis.

Dentur rationes quotcunque, quarum denomi- Fig. 34.
tores ſint 2, 3, 1 ¼. Multiplica denominatorem
per 3 denom., fit 6 denominator rationis compoſi-
ex rationibus, quarum denominatores ſunt
ltiplicati. Hoc eſt ratio 6 ad 1 eſt compoſita
rationibus 6 ad 3, & 12 ad 4. Quòd ſi deno-
inatorem 6 multiplices per denominatorem ter-
m 1 ¼; fit 7 ½ denominator rationis compoſitæ ex
ibus datis rationibus, quarum denominatores
nt 2, 3, 1 ¼.

XI.

mpoſitio rationum non aliud eſt, quàm
rationum multiplicatio: & ratio omnis ex
iiſdem rationibus componitur, ex quarum
multiplicatione producitur.

Am, ut patet ex axiomatis n. 4. & ex n. 7.,
ratio, quæ ex plurium rationum multiplica-
tio-

tione producitur, ea eſt, quam quantitas ex de-nominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem, ſeu conſequens commune. Atqui etiam per defin. Euclid. ratio, quæ ex pluribus rationibus componitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem ſeu conſequens commune.

Scholium.

UT numeri ſequentis demonſtratio clarius percipiatur, obſervandum eſt, multiplicari & dividi magnitudines per invicem cum analogiâ quâdam ad numeros. Quemadmodum igitur numerus per numerum multiplicari dicitur, cum ut eſt unitas ad alterutrum, ita reliquus fit ad alium quempiam, qui productum dicitur, ita planè magnitudo per magnitudinem dicetur multiplicari, cùm ut quæpiam recta pro unitate aſſumta ſe habet ad alterutram datarum, ita reliqua fit ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur. Pari modo, quemadmodum numerus per numerum dividi dicitur, quando ut unus ad alterum, ita unitas fit ad alium, qui quotiens nominatur, ita quoque magnitudo per magnitudinem dicetur dividi, quando aſſumtâ quantitate aliquâ pro unitate, ut una ſe habet ad alteram, ita unitas ad aliam, quæ proinde dicitur quotiens.

XII

XII.

fuerint quæcunque & quotcunque quantitates, ſeu magnitudines, ſeu numeri, ratio prima ad ultimam componitur rationibus mediarum.

N numeris demonſtratum eſt à Theone, Eutocio, & Vitellione. Qui in magnitudinibus demonſtraret, nemo hactenus inventus eſt. Unde Gregorius à S. Vincentio, magnus Geometra, li. 8. ad principium ſecundum, cenſet inter principia numerandum eſſe, donec alicui demonſtratio occurrerit, quâ inter theoremata referri poſſit.

Univerſalem igitur hujus rei demonſtrationem ... re conabimur hunc in modum.

Demonſtratur in magnitudinibus.

Datæ ſint magnitudines quæcunque & quotcunque A, B, C, D. Oſtendendum eſt, rationem A ad D componi ex rationibus A ad B, B ad C, C ad D. Fig. 35.

Fiat ut B *ad* C, *ita* X *ad* B. *Eruntque rationes ad* B, B *ad* C *reductæ ad rationes A ad* B, X *ad* B, *habentes commune conſequens* B, *ac proinde rationum denominatores ſunt A, X, & conſequens commune* B a *munus explet unitatis, quæ* a Per n. 3. *commune conſequens reſpectu omnium denominatorum numericorum.*

Itaque ſi velimus magnitudines A, X per invicem

b *Schol. præc.*

cem multiplicare, oportebit b *facere, ut B* un
eſt ad X, ita A ad quartam Z, quæ erit
ductum multiplicationis A per X, ſeu X per
planè ac ſi cupias invicem multiplicare numer
S, fit ut unitas ad unum numerum S, ita alter
quartum V, qui eſt productum multiplicationis

Quoniam igitur quantitas Z eſt productum
multiplicatione denominatorum A., X, erit ra

c *Per defin. num.* 10.

c *hujus producti Z ad B unitatem ſeu comm*
conſequens ea, quæ producitur ex multiplica
ne rationum A ad B, X ad B, prorſus ut in
num numericarum multiplicatione numeri
ſtendimus evenire, in quâ ſi denominatoru
ſe multiplicentur, ratio producti ad unitatem
eſt, quæ fit ex rationum multiplicatione.

Atqui per conſtr. ratio X ad B eſt ratio B ad C
Ergo etiam ratio Z ad B producitur ex multi
catione rationum A ad B, B ad C. Quia ver
conſtr. ut B eſt ad X, ita A eſt ad Z, etiam in
ſim Z ad A, ut X ad B, hoc eſt per conſtr.
ad C. Igitur permutando ut Z eſt ad B, ita A
ad C. Sed jam oſtenſum rationem Z ad B produci
ex multiplicatione rationum A ad B, B ad C
Ergo etiam ratio A ad C producitur ex multipli
catione rationum A ad B, & B ad C. Atqui num
XI. oſtenſum eſt, rationes componi ex iiſdem ratio
nibus, ex quarum multiplicatione producunt
Ergo ratio A ad C componitur ex rationibus A
B, & B ad C.

Eodem modo demonſtrabitur ratio A ad D com
poni ex rationibus A ad C, & C ad D. Ergo ra
tio A ad D componitur ex rationibus A ad B,
B ad C, & C ad D. Et ſic deinceps in infinitum
Quod erat demonſtrandum.

D

Demonſtratur in numeris.

Andem prorſus demonſtrationem valere in numeris ... oſtendam, unde etiam veritas illius, ac ſoliditas magis ſtabilietur

	$\frac{8}{3}$	
8	2	$\frac{4}{3}$
4	1	
3	$\frac{3}{4}$	

Dati ſint tres numeri quicunque, ex. gr. 8, 4, 3. Fiat ut ... ad 8. ita. 1 ad 2. & ut 4. ad 3. ſic 1. ad $\frac{3}{4}$. Erunt ... itur rationes 8 ad 4 & 2 ad 1; item rationes 4. ad 3. & 1 ad $\frac{3}{4}$ inter ſe æquales; eritque ex æquo etiam ratio 8 ad 3 æqualis rationi 2 ad $\frac{3}{4}$. a Per 22. l. 5.

Fiat deinde ut $\frac{3}{4}$ ad 1. ita 1. ad $\frac{4}{3}$; eruntque rationes 2 ad 1. & 1 ad $\frac{4}{3}$ (hoc eſt rationes 8 ad 4 & 4 ad 3) reductæ ad duas rationes 2 ad 1 & $\frac{4}{3}$ ad 1. habentes commune conſequens unitatem; ac proinde 2 & $\frac{4}{3}$ erunt b *rationum 8 ad 4. & 4 ad 3. denominatores. Multiplicentur jam per invicem denominatores 2 & $\frac{4}{3}$, hoc eſt, fiat ut 1 ad $\frac{4}{3}$. ita 2 ad $\frac{8}{3}$. Erunt $\frac{8}{3}$ productum ex 2 & $\frac{4}{3}$ denominatoribus rationum 8. ad 4. & 4 ad 3. inter ſe multiplicatis. Ergo ratio hujus producti $\frac{8}{3}$ ad 1. eſt ea,* c *quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Jam verò quia per conſtr. ut 1. eſt ad $\frac{4}{3}$ ita 2. eſt ad $\frac{8}{3}$. erit etiam inverſim $\frac{8}{3}$ ad 2. ut $\frac{4}{3}$ ad 1. Sed rurſum per conſtr. $\frac{4}{3}$ ſunt ad 1. ut 1. ad $\frac{3}{4}$ Ergo $\frac{8}{3}$ ſunt ad 2. ut 1. ad $\frac{3}{4}$. Ergo permutando $\frac{8}{3}$ ſunt ad 1. ut 2. ad. $\frac{3}{4}$ Sed jam oſtendi rationem $\frac{8}{3}$ ad 1. eſſe eam, quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Ergo etiam ratio 2. ad $\frac{3}{4}$. eſt ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum 8.* b Patet ex num. 2. c Patet ex num.

 ad

ad 4. & 4. ad 3. Sed oſtenſum eſt ſuprà, ratio[nem] 2. ad ¼ parem eſſe rationi 8. ad 3. Ergo etiam [ra]tio 8. ad 3. producitur ex multiplicatione ra[tio]num 8. ad 4. & 4. ad 3. Igitur per num. [...] ratio 8. ad 3. ex rationibus 8. ad 4. & 4. ad [3.] compoſita eſt. Quod erat demonſtrandum.

8 *Eodem modo demonſtrabitur, ſi pl[u]-*
4 *res dentur numeri quàm tres, ration[em]*
3 *8 ad 25 componi ex rationibus 8 ad*
25 *(hoc jam eſt ex rationibus 8 ad 4 &*
73 *ad 3) & ex ratione 3 ad 25: & ra[tio]-*
nem 8 ad 73 componi ex rationi[bus 8] ad 25 (hoc jam eſt ex rationibus 8 ad 4, 4 ad 3, 3 ad 25) & ratione 25 ad 73. & ſic in infini[]tum.

XIII.

Fig. 36. SI dentur quotcunque rationes, *A ad B*, *C ad D*, *E ad F*, exhibebitur ratio ex omnibus compoſita.

SI fiat ut *A ad B*, ita quæpiam *G ad H*, & ut *C ad D*, ita *H ad I*, & ut *E ad F*, ita *I ad K*: ratio enim *G ad K* erit compoſita ex rationibus *G ad H*, *H ad I*, *I ad K*, ut num. præced. demonſtravimus, hoc eſt per conſtr. ex rationibus datis *A ad B*, *C ad D*, *E ad F*.

XIV.

Ratio non eſt æqualis rationibus ex quibus componitur.

Fig. 36. INter duas quanitates *G*, *K*, aliæ quantitates interponantur, ſive illæ ſint continuè proportiona-

les, ſive non: ratio primæ G ad ultimam K non æqualis rationibus intermediis G ad A, H ad I, ad K, licèt ex iis ſit compoſita. Nam ex iis comi idem eſt, quod produci ex earum multiplicane mutuâ, ut oſtenſum eſt num. XI. Cùm igir ratio G ad K ſit producta ex rationibus G ad I, H ad I, I ad K, inter ſe multiplicatis, ut eſt monſtratione num. 12 patet, non poſſunt ratios G ad H, H ad I, I ad K ſimul ſumtæ æquas eſſe rationi G ad K, niſi cùm per accidens ranum additio & multiplicatio eandem effecerint tionem. Ut igitur rationibus dictis habeatur una ualis, erunt illæ ſibi mutuò addendæ, ut traitur num. 5. & 6., ex quâ additione proveniet raio illis omnibus æqualis; quæ ferè ſemper, ut dixi, rit diverſa ab illâ, quæ ex earundem rationum compoſitione, hoc eſt, multiplicatione exſurget.

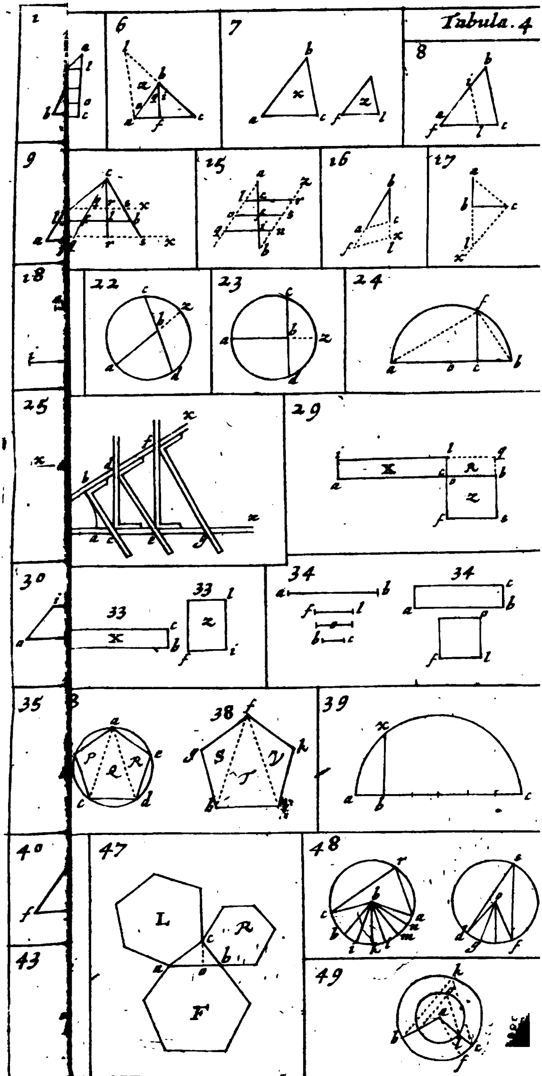
ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER VI.

PRoportionum doctrina, libro quinto univerſim expoſita, in ſexto figuris planis applicatur. Et ſunt, quæ hoc libro traduntur, adeò ſcitu neceſſaria, ut ſine illis arcana Geometriæ penetrare, fructuſque ſuaves Matheſeos percipere nemo poſſit. Ad propoſitiones propè ſingulas oporteret encomium texere; tanta omnium utilitas eſt.

DEFINITIONES.

1. SImiles figuræ ſunt, quæ & ſingulos angulos ſingulis æquales habent, & latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, vel quæ inter æquales angulos exiſtunt, vel quæ ſunt circa æquales angulos (eodem omnia recidunt) proportionalia.

Fig. 7. l. 6 tabulâ 4. *Ut triangula X, Z dicuntur ſimilia, ſi angulus A ſit æqualis angulo F, & angulus B angulo*


Tabula. 4

lo L, & angulus C angulo I, atque inſuper ſi A B ſit ad F L, ut B C ad L I: & B C ad L I, ut C A ad I F: & C A ad I F, ut A B ad F L; comparando ſemper latera æqualibus angulis oppoſita. Eodem modo aliarum figurarum rectilinearum omnium ſimilitudo explicabitur.

2. Reciprocæ figuræ ſunt, cùm in utrâque antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint. Fig. 29.

Ut in parallelogrammis X, Z,
ſi A C ſit ad C B,
ut F C ad C L
antecedentia ſunt A C & F C, quorum in utrâque figurâ unum eſt; & conſequentia ſunt C B & C L, quorum ſimiliter in quâque figurâ unum eſt; parallelogramma proinde X, Z reciproca dicuntur. Idem de aliis figuris intellige.

3. Altitudo figuræ eſt perpendicularis à vertice ad baſim deducta. Eſt Euclidi 4.

Ut trianguli A B C altitudo eſt perpendicularis A Q, à vertice cadens in baſim B C, vel intra triangulum, vel extra in baſim protractam. Baſis autem & vertex aſſumuntur ad libitum. Fig. 1.

4. Similes arcus circulorum dicuntur, qui eandem habent ad totas ſuas circumferentias rationem.

Ut ſi ambo ſint ſuæ circumferentiæ pars tertia, vel quarta &c.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 2. *Triangula (ABC, DEF) & parallelogramma (AOPC, DQRF) quæ eandem habent altitudinem, ſive inter eaſdem exiſtunt parallelas, eam inter ſe proportionem habent, quam baſes (AC, DF.)*

Ab hoc theoremate dependet totus ſextus liber, imò quidquid uſpiam de figuris, ſive planis, ſive ſolidis per proportiones demonſtratum eſt. Demonſtrat illam Euclides per multiplices, quæ in primo ſtatim aditu hujus libri tyrones perturbant. Aliam igitur demonſtrationem dabimus facillimam ex theor. 5. partis ſecundæ lib. 5. hunc in modum.

Sumatur baſeos DF quævis pars aliquota, ex. gr., DG una tertia, & ducatur recta GE, erit etiam triangulum DEG tertia pars trianguli DEF, ut colligitur ex 38. l. 1. Quare recta DG & triangulum DGE ſunt conſequentium *a* ſimiles aliquotæ. Auferatur deinde DG ex baſi AC quoties poteſt, puta ſexies, ducanturque rectæ HB, IB, KB, LB, MB, NB. Quoniam CH, HI &c. æquales ſunt ſingulæ ipſi DG, etiam

a Per defin. 7. l. 5.

etiam ſex triangula C B H, H B I &c. triangulo D E G æqualia *b* erunt ſingula. b *Per* 38. *l.* 1.
Ergo quoties D G continetur in antecedente A C, toties triangulum D E G in antecedente A B C. Eodem diſcurſu oſtendam quaſcunque conſequentium (baſeos D F & trianguli D E F) ſimiles aliquotas in antecedentibus, (baſi A C & triangulo A B C) æquali numero contineri. Ergo per theor. 5. partis ſecundæ lib. 5. ut baſis A C ad baſim D F, ita triangulum A B C ad triangulum D E F. Quod erat demonſtrandum.

Quoniam verò parallelogramma A P, D R ſunt dupla *c* triangulorum A B C, D E F, etiam illa erunt inter ſe ut baſes. c *Per* 41. *l.* 1.

Corollarium.

TRiangula (A B C, F I L) & parallelogramma æquales baſes (A C, F L) vel eandem habentia eam inter ſe rationem habent, quam altitudines (B O, I Q. *Fig.* 3.

Fiant enim Q S, O R æquales æqualibus baſibus F L, A C. Erunt igitur etiam Q S, O R inter ſe æquales. Duc S I, R B. Si in triangulis O B R, Q I S accipiantur B O, I Q, tanquam baſes, e-

runt O R , Q S eorum altitudines: quæ cùm ſint æquales, erunt triangula
a Per 1. l. 6. O B R, Q I S inter ſe, ut *a* baſes B O, I Q. Sed quia ex conſtr. O R par eſt A C, & Q S par F L, triangula O B R,
b Per 38. l. 1. Q I S æquantur *b* triangulis A B C, F I L. Ergo etiam triangula A B C, F I L ſunt inter ſe, ut B O ad Q I.

PROPOSITIO II.

Fig. 4. *SI ad unum trianguli latus (B C) ducta fuerit (F L) parallela, hæc ſecabit proportionaliter latera, (hoc eſt A F erit ad F B, ut A L ad L C.)*

Et ſi recta (F L) ſecuerit latera (B A, C A) proportionaliter, erit ad reliquum latus (B C) parallela.

Pars. 1. Ducantur B L, C F. Quoniam F L ponitur parallela B C, erunt triangula F B L, L C F, eandem baſim F L
a Per 37. l. 1. habentia, inter *a* ſe æqualia. Ergo triangulum X ad utrumque eandem *b* habet
b Per 7. l. 5. rationem, hoc eſt, triangulum X eſt ad triangulum F B L, ut triangulum idem X eſt ad triangulum L C F. Sed triangulum X eſt ad triangulum F B L, ut *c*
c Per præc. A F ad F B: & triangulum X eſt ad trian-

triangulum L C F, ut *d* A L ad L C. Ergo *o* etiam A F eſt ad F B ut A L ad L C. Quod erat demonſtrandum. d Per eand. o Per 11. l. 5.

Pars 2. Ut A F eſt ad F B, ita triangulum X *e* eſt ad triangulum F B L; & ut A L eſt ad L C, ita *f* triangulam X ad triangulum L C F. Sed jam ponitur A F ad F B, ut A L eſt ad L C. Ergo triangulum X eſt *k* ad triangulum F B L, ut idem X eſt ad L C F. Ergo *g* triangula F B L, L C F, eandem habentia baſim, æquantur. Ergo F L, B C *i* ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum. e Per prec. f Per eand. k Per 11. l. 5. g Per 9. l. 5. i Per 39. l. 1.

Corollarium.

SI ad unum trianguli latus (B C) ductæ fuerint plures parallelæ (I O, F L) erunt omnia laterum ſegmenta proportionalia. Fig. 5.

Ducatur F Q parallela A C. Rectæ F S, S Q æquantur *o* L O, O C. Sed B I eſt ad I F, ut *b* Q S ad S F. Ergo etiam B I eſt ad I F, ut C O ad O L. o Per 34. l. 1. b Per 2. l. 6.

PROPOSITIO III.

Fig. 6. *SI recta (BF) angulum trianguli bifari[am] ſecans etiam ſecet baſim (AC) habeb[unt] baſis ſegmenta (AF, FC) eandem prop[or]tionem quam reliqua latera (AB, CB.)*

Et ſi baſeos partes (AF, FC) eand[em] rationem habuerint quam reliqua latera (A[B], CB) recta (BF) baſim ſecans angulum [op]poſitum (ABC) biſecabit.

Pars 1. Produc CB, donec BL [ſit] par BA, & junge AL. Quoniam [in] triangulo Z latera LB, AB æqua[n]tur, anguli *a* quoque L & O æquales [e]runt. Quia igitur externus ABC duobus *b* internis L, O æqualis eſt, angulus I, qui per hyp. ipſius ABC dimidius eſt, æquabitur angulo L. Ergo AL, FB ſunt *c* parallelæ. Ergo in triangulo ACL, AF eſt ad FC, *d* ut L[B] (hoc eſt AB) ad BC. Quod erat de[monſtrandum].

a *Per 5. l. 1.*
b *Per 32. l. 1.*
c *Per 29. l. 1.*
d *Per 2. l. 6.*

Pars 2. Produc iterum CB, donec L[B] ſit par AB. Quoniam ponitur, ut A[F] eſt ad FC, ita AB (hoc eſt LB) eſſe ad BC, erunt AL, FB *e* paralle-læ. Ergo externus I eſt par *f* intern[o] L,

e *Per 2. l. 6.*
f *Per 27. l. 1.*

& alternus Q æqualis alterno O. Sed
i L B, A B æquales ſunt, anguli *o* L *o Per 5. l. 1.*
O ſunt æquales. Ergo etiam I & Q
ales ſunt. Biſectus ergo eſt A B C.
od erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV.

Triangula ſibi mutuò æquiangula ſunt ſimilia; hoc eſt, o etiam latera æqualibus angu- o Def. 1. l. 6. oppoſita habent proportionalia.

N triangulis X, Z, angulus A ſit par angulo F, & angulus C angulo L, & *Fig. 7.* gulus B angulo I. Dico A B eſſe ad F- ut A C ad F L; & A C eſſe ad F ut C B ad L I; & C B eſſe ad L I, B A ad F I.

Dem. ſi angulus F ponatur ſupra ſibi *Fig. 7. & 8.* qualem A, latera F I, F L cadent ſupra latera A B, A C. Et quia *s* angulus *s Fig. 8.* ternus A I L per hypoth. par eſt in- *Sola.* rno B, erunt *a* I L, B C parallelæ. *a Per 29. l. 1.* go *b* B I eſt ad I A, ut C L ad L A. *b Per 2. l. 6.* go *c* componendo B A eſt ad I F ut C *c Per 18. l. 5.* d L F. Quòd ſi angulus L imponatur gulo C, eodem modo oſtendam A eſſe ad F L, ut B C ad I L: & ſi angulus I imponatur angulo B, oſtendetur

pa-

pari modo, B C eſſe ad I L, ut A B ad F I. Liquet ergo propoſitum.

Corollaria.

Fig. 8. 1. SI in triangulo ducatur uni lateri (B C) parallela (L I) erit triangulum L F I ſimile toti C F B, ac proinde C F eſt ad L F, ut B C ad L I.

Nam quia L I, B C parallelæ ſunt, erunt *q* externi F I L, F L I pares internis B & C: F verò utrique triangulo eſt communis. Ergo ſunt æquiangula. Ergo latera C F, L F, oppoſita æqualibus angulis B & F I L, ſunt *r* proportionalia lateribus B C, L I, quæ opponuntur communi angulo F.

q Per 25. l. 6.

r Per præc.

Fig. 9. 2. Si in triangulo parallelas A C, L O ſecet recta B F, ab angulo oppoſito B ducta ſecabit eas proportionaliter.

Nam per coroll. 1. A F eſt ad L I, ut F B ad I B, & F C quoque eſt ad I O, ut F B ad I B. Ergo A F eſt ad L I ut F C ad I Q. Igitur permutando A F eſt ad F C *e* ut L I ad I O.

d Per 11. l. 5.

e Per 16. l. 5.

PRO-

PROPOSITIO V.

I duo triangula habuerint omnia latera ſi-bi mutuò proportionalia, etiam ſibi mutuò iangula erunt. Fig. 10.

Hoc eſt, ſi A B ſit ad R F, ut A C R Q, & ut A C ad R Q, ſic C B QF, & ut CB ad QF, ſic A B ad F: dico angulos antecedentibus op-ſitos æquari angulis, qui opponuntur nſequentibus. Nimirum C ipſi I, B ſi F, A ipſi O.

Ang.	Antec.	Conſeq.	Ang.
C	AB	RF	I
B	AC	RQ	F
A	CB	QF	O

Angulis A & C fac æquales X & Z: c latera coëant in N. Etiam igitur *b* B c N æquales erunt. Quia ergo trian-ula P, T ſunt æquiangula, erit *o* AB RN, ut AC ad RQ. Sed ex hyp. iam eſt AB ad RF, ſicut A C ad R . Ergo A B eſt ad RF, ut eadem A ad R N. Ergo R N, R F *c* æquan-ur. Pari modo oſtendam æquari Q N &

b *Per corol. 9.p.32.l.1.*

o *Per præc.*

c *Per 9.l.5.*

& QF. Triangula igitur T, S ſibim
tuò ſunt æquilatera. Igitur anguli I,
d Per 8.l.1. O æquantur *d* angulis Z, N, X, (
eſt per conſtr.) angulis C, B, A. Qu
erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 10. *SI duo triangula (P, S) habeant u angulum (A) æqualem uni (O) latera (A B, A C, R F, R Q) qu quales angulos continent, proportional triangula erunt ſimilia.*

Anguli A, C fiant æquales X, Z,
latera coëant in N. Igitur anguli q
e Per corol. 9. p. 32. l. 1. que *e* B & N æquales erunt. Oſtend
ut in præcedenti, æquales eſſe RF,
N. Eſt verò R Q utriſque triangulis
T communis; anguli quoque O &
æquales ſunt, quia æquantur ambo
dem A; X per conſtr., O per hyp. Er
o Per 4.l.6. go etiam I & F *o* æquantur ipſis Z & N
Triangulum igitur S æquiangulum e
triangulo T; hoc eſt per conſtr. tria
d Per 4.l.6. gulo P. Ergo S, P *d* ſimilia ſunt. Quo
erat demonſtrandum.

PRO

PROPOSITIO VII.

Ix ullius eſt uſûs.

PROPOSITIO VIII.

N triangulo rectangulo perpendicularis (BC) ab angulo recto in baſim ducta ſecat triangulum in partes toti, & inter ſe ſimiles.

In triangulis ABF, & L, angulus F communis eſt, anguli verò ABF, & X per hypotheſim ſunt recti, adeóque æquales. Ergo reliqui A & O etiam *a* æquales erunt. Ergo *b* triangula ABF & L ſimilia ſunt. Eodem modo ſimilia oſtendam eſſe triangula ABF & R, angulumque I parem angulo F. Ex quo jam patet etiam R & L ſimilia eſſe, cùm æquales ſint anguli I & F, O & A, V & X. Quod erat demonſtrandum. Fig. 11. a Per corol. 9. p. 36. l. 1. b Per 4. l. 6.

Corollaria.

Primò BC eſt media proportionalis inter AC, CF.

Cùm enim ſint in triangulis R & L

æqu. ang. I. F.	æqu. ang. A. O.
lat. opp. AC. CB.	lat. opp. CB. CF.

Pa-

c Per 4. l. 6. Patet c AC eſſe ad CB, ut CB eſt ad C

2. BF eſt media proportionalis inter F & CF. Item AB eſt media inter F & CA.

Nam in triangulis ABF & L ſunt

æqu. ang. ABF, X.	æqu. ang. A.
lat. opp. AF. BF.	lat. opp. BF. C

d Per eand. Ergo AF eſt d ad BF, ut BF ad C

Similiter quia in triangulis ABF, & R, ſ

æqu. ang. ABF. V.	æqu. ang. FI.
lat. opp. AF. AB.	lat. opp. AB. AC

Erit rurſum AF ad AB, ut AB ad AC

PROPOSITIO IX.

Fig. 12. *DAtam rectam (AB) dividere ſecundum datam proportionem FI ad IL.*

Ducatur infinita AZ. Ex quâ ſume AQ, QR æquales FI, IL. Ex R duc RB. Huic ex Q duc QC parallelam. Dico factum.

Patet ex p. 2. l. 6.

PROPOSITIO X.

Fig. 13. *DAtam rectam (AB) ſimiliter ſecare, alteradata (AI) fuerit ſecta (in F, C.)*

E

Extremitates ſectæ & inſectæ jungat recta I B. Huic ex punctis F, C duc parallelas rectæ ſecundæ A B occurrentes in L & Q. Dico factum.

Patet ex corollario p. 2. l. 6.

Scholium.

Ex hac propoſitione diſcemus rectam datam in quotvis æquales partes ſecare. Cum rectâ ſecundâ A B faciat quemvis angulum recta quævis infinita; ex quâ circino cape tot æquales partes A C, C F, F I, in quot ſecare placuerit A B. Duc rectam I B, eique parallelas F A, C Q. Dico factum. Fig. 13.

Aliter idem & faciliùs efficiemus cum Maurolyco hunc in modum: Sit A B triſecanda. Duc ad A B parallelam I X infinitam, ſuprà vel infrà. Ex I X, ſi eſt infra A B, cape circino tres æquales partes I Q, Q R, R S, quæ ſimul majores ſint quàm A B, minores verò, ſi I X eſt ſuprà. Per I & A, item per S & B duc rectas, quæ concurrant in C. Ex C ad Q & R ductæ rectæ datam A B triſecabunt. Demonſtratio patet ex coroll. 2. prop. 4. Fig. 14.

Rurſum cum Maurolyco aliter id ipſum ita obtinebimus. Sit quatriſecanda A B. Duc infinitam A X, eique parallelam B Z etiam infinitam. Ex his cape circino partes æquales A L, L O, O Q, & B V, V S, S R, in ſingulis nempe unâ pauciores, quàm deſiderentur in A B, tum rectæ ducantur L R, O S, Q V. Hæ quatriſecabunt datam A B. Fig. 15.

Nam quia per conſtr. L O, R S *parallelæ &* a Per 33. l. 1. *æquales jungunt* L R *&* O S, *etiam hæ erunt parallelæ. Pari modo* O S, Q V *ſunt parallelæ. Ergo cùm* A Q *ſit ſecta in tres æquales partes, etiam erit* A I *ſecta* b Per corol. p. 2. l. 6. b *in tres æquales. Similiter erit* B C *ſecta in tres æquales, tota igitur* A B *ſecta eſt in quatuor æquales.*

Hæ duæ praxes ſunt faciliores Euclidæâ, quia pauciores ducendæ ſunt parallelæ.

PROPOSITIO XI.

Fig. 16. D*Atis duabus rectis* (*A B*, *B C*) *tertiam proportionalem invenire.*

Duc rectam A C. Ex B A productâ accipe A F parem B C. Per F ad A C duc parallelam F X infinitam, cui in L occurrat producta B C. Dico A B eſt ad B C, ut B C ad C L.

c Per 2. l. 6. Nam A B eſt ad A F, *c* ut B C ad C L. d Per conſtr. Sed A F eſt *d* par B C. Ergo A B eſt ad B C, ut B C ad C L, adeóque C L eſt tertia proportionalis, quæ petebatur.

Aliter.

Fig. 17. STatuantur A B, B C ad angulum rectum. Junge A C. Ex C duc C X perpendicularem ad A C infinitam, cui in L

occurrat AB producta; Dico, AB eſt
BC, ut BC ad BL. Patet ex coroll. 1.
op. 8.

Scholium.

Oterit verò proportio data non ſolùm per tres terminos, ſed etiam per infinitos continuari, & infinitorum proportionalium terminorum mma exhiberi. Pulcherrimè hanc rem, totumue adeò Geometricæ progreſſionis negotium Greius à S. Vincentio proſecutus eſt toto libro 2. ſui eris. Nos in gratiam ſtudioſorum ſuccinctam rei poſitæ conſtructionem, ac demonſtrationem hîc hibebimus.

Lemma 1.

I ratio minoris inæqualitatis L O ad L R ſemper continuetur, venietur ad quantitatem quâs datâ majorem. *Fig. 18. ſecundâ.*

Sit L O ad L R, ut L R ad L Q, &c. Igitur invertendo, ut Q L ad R L, ſic R L ad O L: ergo dividendo b *Q R ad R L, R O, ut R O ad L: & permutando* c *Q R ad R O, ut R L O L. Sed R L eſt major quàm O L. Ergo et- Q R major quàm R O. Pari modo oſtendam eſſe majorem quàm Q R, & ſic deinceps. iam igitur continuando rationem L O ad , ad primam L O ſemper accedunt partes , R Q, Q I &c. perpetuò creſcentes, patet ri ad quantitatem quâvis datâ majorem. od erat demonſtrandum.*

a Per ſchol. p. 16. l. 5.
b Per 57. l. 5.
c Per 16. l. 5.

N 2 *Lem-*

Lemma 12.

Fig. 18. utrâque. SI ratio quæcunque majoris inæqualitatis AB C B ſemper continuetur, ad quantitatem v nietur quâvis datâ minorem.

a Per 9. l. 6. d Per l. 1. Data ſit E O quantumvis parva. Fiat a ut C ad B A, ſic L O ad L R. Poterit d ratio L O L R toties continuari, ut aliquis terminus ha tur, puta L I major quàm A B. Quoties verò tinuata jam eſt ratio L O ad L R, per toti terminos C B, E B, F B continuetur ratio A B CB. Erit F B minor quàm O L.

Nam ex conſtr. patet I L, Q L, R L, O eſſe proportionales ipſis A B, C B, E B, F

e Per 22. f Per 16. l. 5. g Per conſtr. Igitur ex æquo, ut e I L ad O L, ſic A B ad F & permutando f ut I L ad A B, ſic O L ad F Sed I L eſt major g quàm A B. Ergo etiam da O L eſt major quàm F B. Quod erat demonſtra dum.

Problema.

Fig. 19. DAta ſit ratio majoris inæqualitatis A C a B C. Oporteat hanc per infinitos terminos co tinuare, & omnium ſummam exhibere.

Erigantur perpendiculares A L, B O, æqu datis A B, B C, & per L O ducatur recta c currens cum A B C productâ in Z. Dico 1. ſi ex erigas perpendicularem C Q, erit C Q tertia p portionalis. QC transfer in C E, & ex E er E R, erit hæc quarta. E R transfer in E F, erige F S, erit hæc quinta: atque ita ratio A ad B C, hoc eſt A L ad B O, per terminos A L B O, C Q, E R, F S &c. ſive A B, B C, C E

ſF, FI&c. in infinitum continuabitur, quia uilibet terminus (ut FS) poterit auferri ex reſiuo FZ; cùm enim LA (hoc eſt AB) ſit mir quàm AZ, etiam FS erit b *minor quàm* b Patet ex corol. 1. p. 4. l. 6.
Z.

Dico 2. *AZ eſt æqualis toti ſummæ infinitam proportionalium.*

1. *Pars AZ eſt ad BZ, ut* c *AL ad BO;* c Per idem corol.
eſt, ut AB ad BC. Igitur permutando, o *A ſt ad AZ, ut BC ad BZ. Ergo AZ eſt ad* o Per 16. l. 5.
Z d *ut BZ ad CZ. Sed ut AZ eſt ad BZ, ſic Aeſt ad OB, & ut BZ ad CZ, ita OB ad* d Per corol. 2. p. 18. l. 5.
C. Ergo etiam LA eſt ad OB, ut OB ad C. Eodem modo oſtendam OB eſſe ad QC, ut C ad RE, & ſic deinceps in infinitum.

2. *Pars. Tota ſumma infinitorum terminorum, eque minor eſt quàm AZ; neque major; Ergo qualis. Non eſt major, quia, cùm jam oſtendem ſupra, QC eſſe minorem quàm CZ, & RE uàm EZ, & SF quàm FZ, & ſic deinceps ſie termino, poterunt omnes termini QC, RS, S &c. ſine fine conſtitui juxta invicem in rectâ Z, ſic ut nunquam punctum Z attingatur. Non it etiam minor quàm AZ: quia jam oſtendi ſurà, AZ, BZ, CZ eſſe continuè proportiona-s, & eodem modo idem oſtenditur de reliquis E, FZ &c. Cùm igitur transferendo proportiones QC, ER, FS &c. in CE, EF, FI, ſidua EZ, FZ, IZ &c. ſemper ſint continuè portionalia, ut jam oſtendimus, venietur tanm ad reſiduum* e *dato minus, ac proinde ſuma proportionalium ſuperabit quantitatem omm, quæ minor ſit quàm AZ, unde ipſa non teſt eſſe minor quàm AZ. Quoniam igitur nec* e Per l. 2.

major eſt, nec minor quàm A Z, eidem æqu- erit. Quod erat demonſtrandum.

Theorema.

P*Rimorum terminorum differentia, primus t- minus, & tota infinitarum proportionali- ſumma ſunt continuè proportionales.*

Fig. 19. *In ſuperiori figurâ ducatur O X parallela ad* Z. *Igitur* L X *erit differentia primi termini A ſeu A B, & ſecundi B O, ſeu B C. Quoniam* X

f Per corol. 1 p. 4. l. 6. *eſt parallela ad A Z, erit L X ad X O, ut L ad A Z. Sed X O eſt A B & L A etiam eſt* Ergo *L X differentia eſt ad A B primum ter- num, ut A B primus terminus ad A Z totam ſu- mam. Quod erat demonſtrandum.*

Fig. 20. *Idem univerſaliter & breviſſimè demonſtrab- tur in omni genere quantitatis hunc in modum. Sint continuè proportionales quæcunque (etiam nume- ri) A Z, B Z, C Z &c. Erunt igitur* AB, *B C, C E, E F &c. proportionalium differen- tiæ, quæ unâ quantitate I Z æquantur prima A* Z. *Quia verò, ſi proportionales in infinitum con- tinuentur, poſtrema quantitas per lem.* 2. *eva- neſcit, patet infinitarum proportionalium differen- tias æquari primæ A Z. Deinde, quia eſt A Z a- B Z, ut B Z ad C Z, & ſic deinceps, erit di-*

p Per corol. 1. p. 18. l. 5. *videndo A B ad B Z, ut B C ad C Z, & p con- vertendo ut A B prima differentia ad A Z prima- quantitatem, ita B C ſecunda differentia ad B quantitatem ſecundam, & ſic deinceps. Ergo ut B prima differentia ad A Z primam quantitatem,*

q Per 12. l. 5. q *ita omnes differentiæ (hoc eſt, ut jam oſtendi prima quantitas A Z) ad omnes quantitates,* ho- eſ-

ad totam ſummam infinitarum quantitatum. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

Datis tribus rectis (A B, B C, A F) quartam proportionalem invenire. Fig. 21.

Diſponantur datæ rectæ, ut figura conſtrat, & duc rectam B F: cui parallela fiat C Z infinita. Ipſi C Z occurrat A F producta in L.

Dico A B eſt ad B C, ut A F ad F L, ut patet ex p. 2. hujus. Ergo F L eſt quarta proportionalis quæſita.

Scholium.

Pulchrè Bettinus noſter in ſuo Ærario Mathematicæ Philoſophiæ ex 35. l. 3. & 14. hujus, quæ ab hac non dependet, datis tribus quartam, & datis duabus tertiam proportionalem exhibet, hunc in modum.

Si tres dentur rectæ; ſecunda C B & tertia C D Fig. 22. *ponantur in directum, quas prima B A tangat in B ſub quovis angulo. Per puncta C, A, D deſcribatur circulum, cui A B prima occurrat in Z. B Z* a *eſt quarta proportionalis.* a Per 3. l. 4.

Cùm enim rectangula A B Z, C B D b *æqualia ſint, erit A B ad B C, ut B D ad B Z per 14. hujus, quæ ab hac, ut dixi, non dependet.* b Per 25. l. 3.

Fig. 23. *Si dentur duæ rectæ A B, B C, ſecundæ B C apponatur in directum B D æqualis B C. Dein ipſam C B in B tangat prima A B ſub quovis angulo. Tum reliqua ut ſuprá. Erit B Z tertia proportionalis quæſita.*

Demonſtratio ſimilis eſt, cùm enim rectangula A B Z, C B D ſint æqualia, erit A B ad B C ut B D (hoc eſt ut B C) ad B Z.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 24. *DAtis duabus rectis (A C, C B) mediam proportionalem invenire.*

Tota compoſita A B biſecetur in O, & centro O deſcribatur circulus per A & B, ex C erige perpendicularem C F occurrentem peripheriæ in F.

Dico, A C eſt ad C F, ut C F ad C B.

Ducantur enim A F, B F, triangulum a A F B rectangulum eſt, & à recto angulo ducta eſt perpendicularis F C in baſim. Ergo A C ad C F, ut b C F ad C B.

a Per 31. l. 3.

b Per corol. 1. p. 8. l. 6.

Corollarium.

HInc patet, ſi ex quovis peripheriæ puncto (I) ducta ſit ad diametrum perpendicularis (F C) eam eſſe mediam proportionalem inter diametri ſegmenta (A C, C B.)

Scho-

Scholium.

Ic locus omnino exigit, ut de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis iam breviter dicamus aliquid. In hujus problematis ſolutionem, Platonis hortatu, omnes Græci Geometræ ſummo ſtudio incubuerunt. Ab Eutocio in comment. in Archimedem varii recenſentur ſubtiliſſimi modi, Platonis, Archytæ Tarentini, Menechmi, Eratoſthenis, Philonis Byzantini, Heronis, Apollonii Pergæi, Nicomedis, Diocleis, Spori, Pappi: quibus alios deinde addiderunt Vernerus, P. Gregorius à S. Vincentio, Renatus Carteſius. Ex omnibus viſum eſt tres adferre reliquis faciliores.

Modus Platonis.

OPorteat inter datas A B, B C duas medias invenire. Fig. 25.

Ponantur A B, B C. ad rectum angulum, & producantur infinitè versùs X & Z. Accipiantur deinde duæ normæ (ita Claudius Richardus noster; Plato enim unicâ normâ utitur, ſed a cujus lateri D E inſerta ſit regula mobilis per D E) & unius normæ angulus D applicetur rectæ B X, eâ lege, ut & latus unum tranſeat per A, & ad punctum E, in quo latus alterum ſecabit rectam B Z, applicata norma ſecunda tranſeat per C. Dico B D, B E duas eſſe medias inter datas A B, B C: hoc eſt, ut A B eſt ad B D, ſic eſſe B D ad B E, & B E ad B C. a Vide Fig. 26.

Demonſtratio patet ex coroll. 1. p. 8. l. 6. Nam

A D E rectangulum triangulum eſt, & ab angulo recto in baſim perpendicularis cadit D B. Ergo per dictum coroll. ut A B ad B D, ſic B D ad B E: Et ob eandem cauſam, ut B D ad E, ſic B E ad B C. Inter datas igitur A B, B reperta ſunt duæ mediæ B D, B E. Quod erat faciendum. Hic modus inter omnes intellectu facillimus eſt.

Modus Philonis Byzantii.

Fig. 27. *DUæ datæ A B, B C jungantur ad rectum angulum; tum perficiatur rectangulum A B C D, & producantur D A, D C infinitè, ducanturque diametri B D, A C, ſe ſecantes in E. Centro E per B ducatur circulus, qui, quòd angulus A B C rectus ſit, tranſibit* b *per A & C. Tum regula ſic applicetur ad punctum B, ut interceptæ B G, O F ſint æquales. Dico A F, G C eſſe duas medius inter datas A B, B C; hoc eſt, ut A B eſt ad A F, ſic A F eſſe ad G C, & G C ad C B.*

b Patet ex 31. l. 3.

Demonſtr. Quia G B, O F c *æquantur, etiam O G, B F æquales erunt. Ergo æqualia ſunt rectangula O G B, B F O, hoc eſt rectangula* d *D G C, D F A. Ergo eſt ut G D ad D F,* e *ſic reciprocè A F ad G C. Sed G D eſt ad D F,* f *ut B A ad A F. Ergo ut B A eſt ad A F, ſic A F eſt ad G C. Rurſum quia jam oſtendi A F eſſe ad G C ut B A eſt ad A F, eſt verò B A ad A F, ut G D ad D F, hoc eſt ut G C ad C B; erit quoque A F ad G C, ut G C eſt ad C B. Omnes igitur quatuor B A, A F, G C, C B, ſunt continuè proportio-*

c Per conſtr.
d Per coroll. 1 p 36 l. 3.
e Per 14. quæ ab hac non pendet.
f Per corol. 1. p. 4. l. 6.

males; ac proinde inter datas A B, B C inventæ ſunt duæ mediæ. Quod erat faciendum.

Hi duo modi quamvis ſint ingenioſi & faciles, tamen, quia debita normæ & regulæ applicatio non niſi tentando ſit, Geometrici non ſunt.

Modus Carteſii.

Paretur inſtrumentum hujuſmodi. Duæ regulæ aperiri poſſint & claudi circa Y. His inſertæ ſint plures normæ inter ſe connexæ in B, C, D, E, F, G, eâ lege, ut dum regulæ Y X, Y Z aperiuntur, norma B C impellat normam G D in regulâ Y Z, & norma C D impellat normam D R in regulâ Y X, & D E impellat E F, & E F impellat F G, & ſic deinceps: Dum verò regulæ Y X & Y Z clauduntur, omnia puncta B, C, D, E, F, G incidant in unum idemque punctum A. Hoc inſtrumento inter duas datas non ſolùm duæ, ſed etiam quatuor & ſex, imò quotvis mediæ reperientur. Quod neque per ſectiones conicas, neque per modos ullos ab auctoribus ſupradictis inventos obtineri poteſt. Fig. 28.

Pro *duabus mediis opus eſt normis tribus, pro mediis 4. normis 5, & ſic deinceps.*

Minor datarum transferatur in regulam Y X, & ſit Y B; major in regulam alteram Y Z, & ſit Y E. Applicetur norma prima ad punctum B, ibidemque firmetur, & aperiantur regulæ, donec normæ tertiæ latus tranſeat per E. Dico Y E, Y D eſſe duas medias inter datas Y B, Y E; hoc eſt Y B eſſe ad Y C, ut Y C eſt ad Y D, & Y D ad Y E.

Demonſtratio manifeſta eſt ex coroll. 2. p. 8. l.

l. 6. *Nam ex naturâ inſtrumenti, in trigono ϒC D angulus ad C rectus eſt, ab eoque cadit C perpendicularis in baſim ϒD. Ergo per dict. coroll. ut ϒB eſt ad ϒC, ſic ϒC eſt ad ϒD. Rurſum, quia in trigono ϒD E angulus ad D rect. eſt, ab eoque cadit perpendicularis D C in baſ. ϒE, erit ut ϒC ad ϒD, ſic ϒD ad ϒE. Sunt igitur ϒB, ϒC, ϒD, ϒE quatuor contin. proportionales. Inter datas igitur ϒB, ϒE inventæ ſunt duæ mediæ ϒC, ϒD. Quod erat faciendum.*

Si inter datas ϒB, ϒG petantur 4. mediæ, aperi regulas, donec normæ quintæ latus F G tranſeat per G. Erunt ϒC, ϒD, ϒE, ϒF quatuor mediæ inter ϒB, ϒG. Demonſtratio patet ex eod. coroll.

Hic modus, quamvis organum ſit Platonico illo operoſius, planè eximius eſt, tum quia nihil perficit tentando, tum quia ad 4. & 6. imò quotcunque medias ſe extendit.

Per duas medias perficitur problema Deliacum, cubi nimirum duplicatio, & corpora quæcunque in datâ proportione o *augentur, vel minuuntur, quemadmodum id ipſum in figuris planis efficitur* p *per unam mediam. Hanc viam primus aperuit Hippocrates, quam, ut ſingularem & unicam, omnis Geometrarum poſteritas amplexa eſt.*

o *Vide ſchol. poſt.* 18. *l.* 12.
p *Vide corol.* 3. *p.* 20 *l.* 6.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

Arallelogramma æqualia (X, Z) quæ unum angulum (C) uni (O) habent æqualem, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca (hoc eſt AC eſt ad CB, ut FO ad OL.) Fig. 29. 30.

Et ſi latera ſic habent reciproca, parallelogramma ſunt æqualia.

1. Pars. IL & SB productæ concurrunt in Q. Parallelogrammum X eſt ad parall. R, ut AC *a* ad CB: & Z eſt ad R, ut FO ad OL. Sed quia per hyp. X & Z æqualia ſunt, X eſt *c* ad R, ut Z eſt ad R. Ergo etiam AC eſt ad CB, *o* ut FO ad OL. Quod erat demonſtrandum.

a Per 1. l. 6.
b Per eand.
c Per 7. l. 5.
o Per 11. l. 5.

Dem. 2. pars, ut AC ad CB, ſic *d* X eſt ad R, & ut FO ad OL, ſic *e* Z ad R. Sed jam per hyp. AC eſt ad CB, ut FO ad OL. Ergo X eſt ad R *o* ut Z eſt ad R. Ergo X & Z æqualia *q* ſunt.

d Per 1. l. 6.
e Per eand.
o Per 11. l. 5.
p Per 9. l. 9.

PROPOSITIO XV.

Æ Qualia triangula (ACL, FCB) quæ unum angulum (C) uni (O) æqualem habent,

habent, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca, (hoc eſt A C eſt ad C B, ut O ad O L.)

Et ſi latera ſic habent reciproca, triangula ſunt æqualia.

Ducatur recta L B, reliqua demonſtratio eadem quæ præcedentis.

Corollarium.

TAm parallelogramma, quàm triangula, quæ reciprocant baſes & altitudines, ſunt æqualia. Et è converſo.

Patet ex duabus præcedentibus.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 33. *SI quatuor rectæ (A B, F I, I L, B C) fuerint proportionales (hoc eſt ſi A B ſit ad F I, ut I L ad B C) rectangulum (X) ſub extremis (A B, B C) æquale eſt rectangulo (Z) ſub mediis (F I, I L.)*

Et ſi rectangulum ſub extremis æquatur rectangulo ſub mediis, erunt illæ quatuor rectæ proportionales.

1. Pars. In rectangulis X & Z, circa rectos angulos, ac proinde æquales B, I, per

hyp.

p. eſt A B ad F I, ut reciprocè I L ad B. Ergo *a* X & Z æqualia ſunt. Quod at demonſtrandum. a *Per* 11. *l.* 6.

2. Pars. Quoniam X & Z jam ponunr æqualia; Ergo *b* circa æquales anguſ B & I, eſt A B ad F I, ut reciprocè I ad B C. Quod erat demonſtrandum. b *Per eand.*

PROPOSITIO XVII.

I tres rectæ (A B, F L, B C) fuerint proportionales, rectangulum ſub extremis A B, B C) æquale erit quadrato mediæ F O.) *Fig.* 34.

Et ſi rectangulum ſub extremis æquatur quaato mediæ, erunt tres illæ rectæ proporonales.

1. Pars. Mediæ F L accipiatur par O. uoniam igitur per hyp. A B eſt ad F L, : F L ad B C, eſtque O par FL, erit ıoque A B ad F L, ut O ad B C. Ergo ectangulum ſub extremis A B, B C æatur rectangulo ſub mediis F L & O, c eſt quadrato F L. o *Per. præc.*

2. Pars. Demonſtratur ſimiliter ex ſendâ parte præcedentis.

Co-

Corollarium.

Fig. 24. EX hac & ex 13. patet, ſi in circ ſit F C perpendicularis diametro, r ctangulum A C B æquale eſſe quadra F C.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 35. *SUper datâ rectâ (R S) dato polygono B Q ſimile ſimiliterque poſitum deſcribere.*

Polygonum datum B Q reſolve in trian-gula. Super datâ rectâ R S fac *a* angulo R, O æquales angulis B, A. Coibunt latera in X. Super X S fac angulos V I æquales angulis T, C. Coïbunt latera in Z. Dico factum.

a Per 23. l. 1.

Nam quia anguli R, O æquantur angulis B, A, etiam E, K *b* æquales e-runt: & quia etiam *c* V æquatur T, to tus E V toti K T æqualis erit. Similit quia *d* ſinguli O, I æquantur ſingulis & C, toti O I, A C æquales erunt. quia *e* V & I æquantur T & C, eti Z & Q æquales *f* ſunt. Polygona igi R Z, B Q ſibi mutuò æquiangula ſu Reliquum eſt, ut oſtendatur etiam lat

b Per corol. 9. p. 32. l. 1.
c Per conſtr.
d Per conſtr.
e Per conſtr.
f Per corol. 9. p. 32. l. 1.

eſſ

ſſe proportionalia. R S eſt ad B F *g* ut g *Per 4. l. 6.*
S X ad F L: & rurſum S X eſt ad F I, *h* h *Per eand.*
ut S Z ad F Q. Ergo ex æquo *i* R S eſt ad i *Per 22.*
S Z; ut B F ad F Q. &c. *l. 1.*

PROPOSITIO XIX.

Triangulorum (X, Z) ſimilium proportio *Fig. 36. 37.*
eſt duplicata proportionis laterum (A C,
F I) æqualibus angulis ſubtenſorum.

Hoc eſt, ſi *a* fiat ut A C ad F I, ſic F I a *Per 11.*
ad tertiam A Q; triangulum X eſt ad *l. 6.*
triangulum Z; ut A C prima ad tertiam
proportionalem A Q. Vide defin. 10. 5.

Quoniam triangula X, Z ſunt ſimilia,
erit B A ad L I, *b* ut A C ad I F. Sed per b *Per 4. l. 6*
conſtr. ut A C ad I F; ſic I F ad A Q. Er-
go etiam B A eſt ad L I, *c* ut I F ad A Q. c *Per 11.*
Ergo in triangulis Q B A & Z latera cir- *l. 5.*
ca angulos A, I, qui per defin. triangu-
lorum ſimilium æquales exiſtunt, ſunt
reciproca. Æquantur igitur *d* Q B A & d *Per 15.*
Z. Atqui triangulum X ad Q B A eſt, ut *l. 6.*
baſis A C ad baſim A Q. Ergo etiam X e *Per 1. l. 6.*
eſt ad Z, ut A C ad A Q. Quod erat
demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

Fig. 38. *SImilia polygona* (*ABCDE*, *FGHI*[illegible]) *dividuntur* (1) *in ſimilia triangula* (*P*[illegible] *S*, & *Q*, *T*, & *R*, *V*) *numero æqualia* ([illegible] & *totis proportionalia* (3) & *polygonorum proportio duplicata eſt proportionis laterum* ([illegible] *B*, *FG*) *inter æquales angulos* (*B*, *G*, &[illegible] *AE*, *GFK*) *exiſtentium*.

1. Pars. Quoniam polygona ſunt ſimilia, erunt *a* ſibi mutuò æquiangula, eruntque bini binis æquales anguli BAE, GFK, & B, G, & BCD, GHI, & C DE, HIK, & E, K. Quia igitur AB eſt ad BC, *b* ut FG ad GH, angulique B & G æquales ſunt, ſimilia *c* ſunt triangula P, S. Similiter demonſtrabitur ſimilia eſſe R & V. Deinde quia toti BCD, GHI, & ablati BCA, GHF æquales ſunt, etiam reliqui ACD, FHI æquales erunt. Eodem modo oſtendam æqui[illegible] ADC, FIH, ergo *d* tertius CAD tertio HFI æqualis eſt. Quare etiam *e* Q[illegible] T triangula ſimilia ſunt. Liquet ergo [illegible] Pars.

a Per defin. 1. l. 6.
b Per eand.
c Per 6. l. 6.
d Per corol. 9. p. 32. l. 1.
e Per 4. l. 6.

Pars 2. Quoniam ſimilia ſunt P & S, ratio P ad S duplicata eſt *f* rationis CA ad H[illegible]

f Per præc.

HF. Sed ob eandem cauſam etiam ratio Q ad T duplicata eſt rationis CA ad HF. Ergo P eſt ad S ut *g* Q ad T. Eodem modo oſtendam, ut Q eſt ad T, ita R eſſe ad V. Ergo ut *i* unum antecedens P eſt ad unum conſequens S, ita omnia conſequentia S, T, V ſimul ſumta, hoc eſt polygonum ad polygonum. Quod erat alterum. *g Per 34. l. 5.* *i Per 12. l. 5.*

3. Pars. Ratio P ad S eſt *k* duplicata rationis AB ad FG. Sed ratio polygoni ad polygonum eſt eadem cum ratione P ad S, ut jam oſtendi. Ergo etiam ratio polygoni ad polygonum eſt duplicata rationis AB ad GF. Quod erat tertium. *k Per præc.*

Corollaria.

1. OMnes figuræ ordinatæ ſeu regulares, ut æquilatera triangula, quadrata, pentagona &c. ſunt inter ſe in ratione duplicatâ laterum. Omnes enim ordinatæ ſunt ſimiles inter ſe, ut patet ex def. 1. 6.

2. Si figurarum quarumvis ſimilium latera AB, FG, inter æquales angulos poſita, ſint nota, etiam proportio figurarum innoteſcet. Sit ex. gr. AB 2. ped. *Fig. 38.*

& F G 6. pedum, fiat ut 2. ad 6. ita 6. ad alium numerum nempe 18. Figura minor eſt ad majorem, ut 2. ad 18. ſeu ut 1. ad 9. Invenitur autem tertius proportionalis numerus, ſi ſecundus datorum multiplicetur per ſe ipſum, & productus per primum dividatur.

3. Ex eâdem propoſitione elicitur methodus præclara figuram quamvis rectilineam augendi, vel minuendi in ratione datâ: ut ſi velim pentagoni, cujus latus eſt A B, aliud facere quintuplum. Inter terminos rationis datæ A C, B C inveni *m* mediam proportionalem B X. Super hac conſtrue *n* pentagonum ſimile dato. Hoc erit quintuplum dati.

Fig. 39.
m *Per* 13. *l.* 6.
n *Per* 18. *l.* 6.

Nam per 20. pentagonum A B eſt ad ſibi ſimile B X, ut A B prima ad B C tertiam.

Porrò, cùm etiam circulorum proportio ſit duplicata proportionis diametrorum, (ut oſtendetur p. 2. l. 12.) hæc praxis ad circulos quoque pertinebit.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 40.

Figuræ (A, B) quæ eidem (C) ſimiles ſunt, etiam ſibi mutuò ſimiles ſunt.

Pa-

Patet ex defin. 1.l.6. ex ax. 1.l.1. & propoſ. 11.l.5.

PROPOSITIO XXII.

SI quatuor aut plures rectæ (FI, LQ, & OR, SV) proportionales fuerint, figuræ ſimiles, ſimiliterque ab iis deſcriptæ (A, B, & E) proportionales erunt. Fig. 40. & 41.

Et è converſo.

Demonſtratio primæ partis patet ex 34.5. Quoniam enim [a] rationes A ad B, & E ad K ſunt duplicatæ rationum F I ad LQ, & OR ad SV, ex hypotheſi æqualium etiam ipſæ æquales erunt. [a] Per 19. & 20. l. 6.

Pars 2. patet ex 35.l.5.

PROPOSITIO XXIII.

ÆQuiangula parallelogramma (X, Z) inter ſe rationem habent compoſitam ex rationibus laterum (A C ad C B; & L C ad C F.) Fig 42.

Hoc eſt, ſi fiat CB ad O, ut LC ad CF, X eſt ad Z, ut A C ad O. Vide quæ demonſtravimus l. 5. parte 3. num. 13.

Concurrant IL, SB in Q. Parallelogrammum X eſt *b* ad parallelogrammum R, ut AC ad CB: & R eſt ad Z, *c* ut LC ad CF (hoc eſt ut CB ad O.) Ergo *d* ex æquo X eſt ad Z, ut AC ad O. Quod erat demonſtrandum.

b *Per* 1. *l.* 6
c *Per eand.*
d *Per* 22. *l.* 6.

Corollaria.

Fig. 42. HInc & ex 34. l. 1. patet primò. Triangula, quæ unum angulum (ad C) æqualem habent, rationem habere compoſitam ex rationibus rectarum AC ad CB, & LC ad CF æqualem angulum continentium.

Patet 2. Rectangula, ac proinde & parallelogramma quæcunque, rationem inter ſe habere compoſitam ex rationibus baſis ad baſim & altitudinis ad altitudinem. Neque aliter de triangulis ratiocinaberis.

Fig. 42. Patet 3. Quo modo triangulorum ac parallelogrammorum proportio exhiberi poſſit. Sunto parallelogramma X & Z, & eorum baſes AC, CB, altitudines CL, CF, fiat *e* ut CL altitudo ad altitudinem CF, ita baſium altera CB ad O, parallelogrammum X eſt ad parallelogram. Z, ut AC eſt ad O.

e *Per* 12. *l.* 6.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

IN omni parallelogrammo (*SF*) *quæ circa* (*A B*) *diametrum ſunt parallelogramma* (*CL*, *OI*) *& toti & inter ſe ſimilia ſunt.* Fig. 43.

Per 27. 1. æquales ſunt anguli C, S, & L, E. Per eandem E eſt par I, hoc eſt per eandem ipſi A; B verò & toti S F, & parti C L communis eſt. Igitur totum S F & pars C L æquiangula ſunt. Reliquum eſt, ut etiam latera æqualibus angulis oppoſita habeant proportionalia.

Quoniam in triangulis B C E, B S A eſt C E parallela ad S A, erit *c* B C ad C E, ut B S ad S A; & C E eſt ad E B, ut *e* S A ad A B. Quia verò in triangulis quoque E L B, A F B, E L eſt parallela ad A F, erit F B ad E L, ut A B ad A F. Ergo ex æquo *f* C E eſt ad E L, ut S A ad A F. Igitur *l* C L & totum S F ſimilia ſunt. Eodem modo oſtendam O I eſſe ſimile toti S F. Ergo *n* C L & O I ſunt etiam ſimilia inter ſe. Quæ erant demonſtranda.

c *Per corol.* 1. *p.* 4 *l.* 6.
e *Per idem corol.*
f *Per* 22. *l.* 5.
l *Per defin.* 1. *l.* 6
n *Per* 21. *l.* 6.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 46. *POlygonum datum (A) in aliud dato (B) ſimile tranſmutare.*

Sive polygonum conſtituere æquale dato A, & ſimile alteri dato B.

Super CF latere polygoni B, cui ſimile petitur, fac rectangulum Q *a* æquale B. Deinde ſuper FS fac *b* rectangulum R æquale. A Manifeſtum eſt GF & FI eſſe in directum. Inter CF, FI inveni *c* mediam proportionalem FL. Super hac fac *d* polygonum ſimile dato B, erit hoc etiam æquale dato A.

a *Per* 44. *l.* 1.
b *Per eand.*
c *Per* 13. *l.* 6.
d *Per* 18. *l.* 6.

Nam cùm per conſtr. ſint tres proportionales CF, FL, FI, polygonum B eſt ad ſimile ſibi polygonum ſuper FL factum *e*, ut CF ad FI; hoc eſt *i* ut Q ad R. Igitur permutando, ut polygonum B eſt ad Q, ita polygonum ſuper FL eſt ad R. Sed per conſtr. polygonum B æquatur Q. Ergo etiam polygonum ſuper FL, ſimile ipſi B, æquatur R, hoc eſt per conſtr. dato A. Factum eſt igitur quod petebatur.

e *Per* 20. *l.* 6 & *defin.* 10. *l.* 5.
i *Per* 1. *l.* 6.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

PArallelogramma ſimilia (BD, FN) habentia angulum communem (A) circa eandem diametrum exiſtunt.

Duc rectas AE, CE, ſi negas AEC eſſe diametrum communem parallelogrammorum B D, & F N, ipſius B D diameter eſto recta alia A G C ſecans F E in G, & duc parallelam G H. Parallelogramma igitur F H, B D exiſtent circa communem diametrum A G C, ac proinde *a* eſunt ſimilia. Ergo ut B A ad A D, *b* ſic F A ad A H. Sed etiam ut B A ad A D, ſic F A ad A N, cùm B D, F N ſimilia ſint per hyp. Ergo F A eſt ad A H, ut F A ad A N. Quod eſt abſurdum. *Fig. 34.* a *Per 24. l. 6.* b *Per defin. 1. l. 6.*

PROPOSITIO XXVII. XXVIII. XXIX.

TYronibus faceſſunt negotium, & nullius fere ſunt usûs.

PROPOSITIO XXX.

DAtam rectam (AB) ita ſecare, ut tota (AB) ſit ad unum ſegmentum (AC) ſicut idem ſegmentum eſt ad reliquum (CB.) Fig. 35.

O 5 Hoc

Hoc eſt (ut loquuntur Geometræ) neam extremâ ac mediâ ratione ſecare.

Per 11. 2. ita ſeca A B in C, ut rect gulum ſub A B, B C ſit æquale quadr to A C. Dico factum.

Erit enim per 17. ut A B ad A C, ſic C ad C B.

Hujus ſectionis vis admirabilis eſt in corpo regularium inſcriptione & comparatione.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 47. *SI à lateribus trianguli rectanguli (A C figuræ ſimiles quæcunque deſcribantur, er ea, quæ opponitur recto angulo, duabus ſimul reliquis (L, R) æqualis.*

Propoſitio igitur 47. l. 1. hîc redditur univerſalis.

Ab angulo recto C demittatur perpen dicularis C O. Quoniam A B, B C, B O

a per corol. 2. p. 8. l. 6. ſunt *a* tres proportionales, erit F ad ſibi

b Per 20. l. 6. & per deſ 10. l. 5. ſimilem R, *b* ut A B prima ad B O ter

tiam. Rurſum quoniam *c* B A, A C,

O ſunt proportionales, erit F ad ſibi

c Per corol. 2. p. 8. l. 6. milem L, ut *d* B A prima ad A O terti

d Per 20. l. 2. & deſin. 10. l. 6. Quia igitur eſt F ad R, ut A B ad B & F ad L, ut A B ad A O, erit quoque

L & L ſimul ſumtas, ut *e* A B ad B O, *e Per 24. l. 5.*
ſimul ſumtas. Sed A B duabus B O,
æqualis eſt. Ergo etiam F duabus
L æqualis erit. Quod erat demon-
ndum.

Corollarium.

E hac propoſitione facilè dabitur
quotcunque figuris ſimilibus rectili-
s quibuſcunque una omnibus æqualis
ſimilis, eâdem prorſus methodo, quâ
obl. 1. ſcholii poſt. 47. l. 1. exhibetur
tis quotlibet quadratis unum æquale.
demonſtratione tantùm pro 47. l. 1. ci-
ur 31. l. 6.

PROPOSITIO XXXII.

Ix habet uſum, nec quidquam habet no-tabile.

PROPOSITIO XXXIII.

N æqualibus circulis, vel eodem, anguli, ſi-ad centra (ut A B C, F O D) ſive ad peri-ſiam (ut A R C, F S D) eam inter ſe ratio-habent, quam arcus (A K C, F G D) qui-inſiſtunt. Idem intellige de ſectoribus. *Fig. 42.*

Quod

Quod attinet ad angulos centri &
ctores, demonſtrabitur eodem pro
modo, quo prop. 1. hujus libri dem
ſtratum eſt, triangula æquè alta eſſe
baſes. Tantùm ubi iſthic citatur pr
38. l. 1. hîc citetur 29. lib. 3.

Quoniam verò ad peripheriam ang
R & S dimidii *a* ſunt angulorum ad c
trum ABC, FOD, quod de his o
ſum eſt, liquebit etiam de illis.

a *Per* 20, *l.* 3.

Corollaria.

1. ANgulus centri (BAC) eſt ad qua
tuor rectos, ut arcus BC, *cui inſi*
ſtit, ad totam circumferentiam.

Fig. 49.

Nam ut BAC eſt ad rectum BAF, ita
per hanc 33. arcus BC ad quadrantem BF.
Ergo angulus BAC eſt ad 4. rectos, ut
arcus BC eſt ad 4. quadrantes, hoc eſt a
totam peripheriam.

2. Inæqualium circulorum arcus IL,
BC, qui æquales ſubtendunt angulos
ſive ad centra ut IAL, & BAC, ſive
peripheriam, ſunt ſimiles.

Nam arcus IL eſt ad ſuam periph
riam, *b* ut angulus IAL, hoc eſt ut B
C, ad 4. rectos, & arcus BC eſt ad ſu
peripheriam *c*, ut idem angulus BAC
4. r

b *Per corol.* 1.
c *Per idem corol.*

rectos. Ergo I L eſt ad ſuam periphe-
m, ut B C ad ſuam. Ergo *d* ſunt ſimi- d *Per defin. 4. l. 6.*
arcus I L & B C.

3. Duæ ſemidiametri (A B, A C) à
ncentricis peripheriis arcus auferunt ſi-
les I L, B C. Patet ex coroll. 2.

4. Segmenta (B K C, I O L) quæ
gulos capiunt æquales (K, O) ſimi-
ſunt.

Nam per coroll. 2. arcus B C, I L,
proinde etiam arcus B K C, I O L
miles ſunt.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRI

LIBER UNDECIMUS,

NOBIS SEPTIMUS.

SEx libris primis ſubjungit Eucli
elementa numerorum, tribus
quentibus, ſeptimo, octavo
nono comprehenſa, quibus eti
decimum de quantitatibus incom
menſurabilibus adjungit. Nos à planis immedia
tranſimus ad ſolida, de numeris ſeorſum tract
ri. Id, opinor, diſcentibus commodius erit, ſi el
menta Geometriæ, nullâ aliâ tractatione inter
rupta, ſimul omnia habeantur. Nihilominus cùm
citabimus propoſitiones hujus & ſequentis libr
eos non ſeptimum & octavum, ſed undecimum
duodecimum appellabimus, ne, ſi ab ordine Eu
dæo ubique recepto diſcedamus, propoſition
tatio implicatior reddatur.

Hic liber duas quodammodo partes compl
tur. In primâ jaciuntur fundamenta, quibu
lidorum, hoc eſt corporum, doctrina univerſ
titur. Alterâ parallelepipedorum affectiones
ponuntur.

DEFINITIONES.

SOlidum, ſive corpus eſt, quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet.

2. Solidi extremum eſt ſuperficies.

3. Linea recta (AB) eſt ad planum (CC) recta ſive perpendicularis, cùm ad rectas omnes lineas (C A) in plano (C C) ductas, à quibus illa tangitur, angulos rectos facit (BAC, BAC.) *Fig. 1. lib. 11. tabulâ. 5.*

4. Planum ad planum rectum ſive perpendiculare eſt, cùm omnes rectæ lineæ (L Q) quæ communi planorum ſectioni (X R) perpendiculares ducuntur in planorum uno, rectæ ſunt alteri plano (ABCO.) *Fig. 2.*

5. Si recta linea (OL) plano inſiſtat non ad rectos angulos, & à ſublimi ejus puncto (L) ad planum ducatur perpendicularis LP, jungaturque PO, angulus L O P dicitur inclinatio lineæ O L ad planum. *Fig. 3.*

6. Si planum (R E) plano (L Q) non inſiſtat perpendiculariter, alterius ad alterum inclinatio eſt acutus angulus (ABC.) qui continetur à rectis lineis (AB & BC) quæ in utroque plano ad com- *Fig. 4.*

communem ſectionem (OE) ducti perpendiculares.

7. Planum ad planum ſimiliter inclinatum dicitur, atque alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli ſunt æquales.

8. Parallela plana ſunt, quæ in omnem partem producta æqualibus ſemper intervallis diſtant.

9. Similes figuræ ſolidæ rectilineæ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur multitudine æqualibus.

Fig. 5. 10. Angulus ſolidus rectilineus eſt, qui pluribus, quàm duobus, planis angulis (BAC, CAO, OAB) non in eodem exiſtentibus plano, ſed ad unum punctum conſtitutis, continetur.

11. Æquales ſolidi anguli ſunt, qui intra invicem poſiti congruunt.

Quemadmodum angulus planus eſt inclinatio linearum, ita ſolidus angulus eſt inclinatio ſuperficierum. De utroque igitur eodem modo ratiocinandum erit. Conſule ſcholium poſt prop. 16. l. 3.

Fig. 6. 7. 8. 12. Priſma eſt figura ſolida, planis comprehenſa, quorum adverſa duo (DFE, ACB) ſunt parallela, æqualia & ſimilia.

13. P

13. Parallepipedum eſt ſolidum ſex quadrilateris ex adverſo parallelis comprehenſum. Fig. 8.

14. Si ſex plana ex adverſo parallela ſint quadrata, ſolidum iis comprehenſum cubus erit.

PROPOSITIO PRIMA.

Recta lineæ pars una (AC) nequit eſſe in ſubjecto plano (OF) altera (CB) extra planum. Fig. 9.

Per ſe clarum eſt ex definitione plani, & lineæ rectæ. vide defin. 5. & 4. l. 1.

PROPOSITIO II.

Omne triangulum in uno eſt plano. Et duæ rectæ ſe mutuò ſecantes in eodem plano ſunt.

Prima pars per ſe clara eſt, cùm triangulum nihil ſit aliud, quàm plana ſuperficies tribus rectis comprehenſa. Ex quo etiam patet pars altera. Fig. 10.

PROPOSITIO III.

Fig. 11.

SI duo plana (A B , C D) ſe mutuò ſecant (E F) communis eorum ſectio eſt recta linea.

Patet ex definitione plani. Licebit tamen ſic demonſtrare: ſi E F ſectio communis non eſt recta linea, ducatur in plano C D recta E O F, & in plano B A recta E Q F, duæ igitur rectæ E O F, E Q E claudent ſpatium. Quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO IV.

Fig. 12.

SI recta (B A) duabus rectis (C A X, F A S) ſe mutuò ſecantibus perpendicularis exiſtat, etiam plano per ipſas ducto perpendicularis erit.

Si negas, alia recta B Q plano rectarum A C , A F ſit perpendicularis. Junge A Q, & huic in plano F A C duc perpendicularem Q O. Hæc producta neceſſariò ſecabit *o* aliquam rectarum C A X, F A S, vel utramque, ubicunque tandem fuerit punctum Q. Secet ergo C A X

o Colligitur ex ſchol. poſt. 31. l. 1.

in O, jungaturque B O. Quoniam er-
angulus B A O per hyp. rectus eſt,
erit quad. B O. Æ. *a* quad. B A, } quad. A O. } *a Per 47. l. 1.*

d quia B Q ponitur recta plano F A C,
proinde *b* rectum facit cum A Q angu-
m B Q A, eſt *b Per defin. 3. l. 11.*

quad. B A. *c* Æ. quad. B Q } quad. A Q. } *c Per 47. l. 1.*

t quia angulus A Q O per conſtr. rectus
t;

quad. A O. Æ. *o* quad. O Q. } quad. A Q. } *o Per eand.*

rgo quad. B O Æ. quad. B Q } quad. O Q } quad. A Q bis. }

rgo quad. B O majus eſt B Q & O Q, ac-
oinde *d* angulus B Q O rectus non eſt. *d Patet ex eâdem.*
rgo B Q non eſt recta *e* plano C A F. Li-
uet ergo quæſitum. *e Patet ex defin. 3. l. 11.*

Scholium.

EX eo quòd ponebatur B Q *eſſe recta plano FAC, directè eſt demonſtratum* B Q *non eſſe rectam plano F A C : ac proinde ex eo quòd negaretur aſſertio theorematis, eadem aſſertio directè probata eſt. Hæc demonſtratio quoad ſubſtantiam eſt Joannis Ciermans.*

PROPOSITIO V.

Fig. 13. *SI tres rectæ (B A, C A, F A) eid recta (A R) ad idem punctum (A) ſ perpendiculares, tres illæ erunt in uno plano.*

Sit enim, ſi fieri poteſt, earum una B in alio plano R O, quod ſecet L Q, p num duarum reliquarum C A, F A, ctâ A O. Quoniam R A per hyp. per dículariter inſiſtit duabus C A, F A, pl no L Q recta *a* erit. Ergo cum A O r ctum facit *b* angulum RAO. Sed etiam hyp. angulus R A B rectus eſt. Ergo an guli R A B & R A O æquales ſunt. *Quod* eſt abſurdum.

a per præc.
b per defin. 3. l. 11.

PROPOSITIO VI.

Fig. 14. *LInea rectæ (A B, CD) quæ eidem pla no (E F) ſunt perpendiculares, inter ſ ſunt parallelæ.*

Poſtulari poterat ut per ſe notum; lic bit tamen ſic demonſtrare.

Junctâ B D, fac in plano F E line D G normalem ad BD, & parem B A, ju ganturque D A, G A, G B. Rectæ

D

, DG æquantur BD, *a* BA, & angli BDG, *b* DBA ſunt recti. Ergo A B G *c* ſunt æquales. Igitur triangula B C, G D A ſibi mutuò æquilatera ct, ac proinde anguli ABG, ADG quales. Sed ABC *d* rectus eſt. Quare A D G rectus. Sunt verò & B D G ex nſtr. & C D G definit. 3. recti. Ergo D ad tres CD, AD, BD recta eſt. rgo C D cum A D, B D eſt in uno *i* plano, ſed etiam A B cum A D, B D *o* in uno lano eſt. Ergo AB, CD, ſunt in uno lano. Ergo cùm anguli ABD, CDB nt *p* recti, erunt AB, CD *q* parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

a *Per conſtr.*
b *Per defin. 3 l. 11.*
c *Per 4. l. 1.*
d *Per defin. 3 l. 11.*
i *Per præc.*
o *Per 2. l. 11.*
p *Per defin. 3. l. 11.*
q *Per 29. l. 1. & defin. 36. l. 1.*

PROPOSITIO VII.

Recta (EF) ſecans rectas (AB, CD) poſitas in eodem plano, in uno eſt cum ipſis lano. Fig. 15.

Poſtulari poterat. Qui volet ſic demonſtret.

Planum rectarum AB, CD ſecet aliud planum per puncta E, F, ſi jam EF non eſt in plano AB, CD, non erit EF communis ſectio. Sit ergo EGF. Ergo EGF *a* eſt linea recta. Duæ igitur rectæ EF

a *Per 3. l. 11.*

EF, EGF concludunt ſpatium. Qu[od] eſt abſurdum.

Corollarium.

HInc ſequitur, ſi EF ſecat paralle[las] AB, CD, in eodem eſſe cum ip[ſis] plano; omnes enim parallelæ *b* ſunt [in] uno plano.

b *Per defin. 36. l. 1.*

PROPOSITIO VIII.

Fig. 14.

SI *parallelarum (AB, CD) una (AB) plano (EF) ſit recta, etiam altera (CD) eidem plano erit recta.*

Poterat poſtulari. Si demonſtratio quæritur, fere ſimilis ea eſt demonſtrationi propoſitionis 6.

PROPOSITIO IX.

Fig. 16.

R*Ectæ (AB, EF) quæ ſunt eidem rectæ (CD) parallelæ, licet non in eodem cum illâ plano, etiam ſunt inter ſe parallelæ.*

Quamvis poſtulari poſſet, licebit tamen ſic demonſtrare.

In plano parallelarum AB, CD du[catur] GK

GK normalem ad CD. Item in plano parallelarum EF, CD duc HK normalem ad CD. Ergo *a* CK recta eſt plano GKH. Ergo cùm AG, EH ſint parallelæ ad CK, erunt AG, EA *b* rectæ plano GKH. Ergo AG, EH *c* ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

a Per 4 l. 11.
b Per 8. l. 11.
c Per 6. l. 11.

PROPOSITIO X.

SI duæ rectæ (AC, BC) ſint parallelæ duabus rectis DF, EF, licèt non ſint in eodem plano, æquales angulos (C & F) comprehendunt. Fig. 17.

Fiant CA, CB æquales FD, FE, & ducantur DE, AB, DA, FC, CB. Cùm AC, FD ſint parallelæ & æquales, etiam AD, CF *a* parallelæ ſunt & æquales. Similiter oſtendam BE, CF eſſe parallelas & æquales. Ergo etiam AD, BE ſunt *b* parallelæ & *c* æquales. Æquantur *d* ergo AB, DE. Cùm igitur triangula BAC, EDF ſibi mutuò ſint æquilatera, anguli C & F *e* æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

a Per 33. l. 1.
b Per præc.
c Per ax. 1.
d Per 33. l. 1.
e Per 8. l. 1.

PROPOSITIO XI.

Fig. 18. *AD planum datum (A B) à dato extra illud puncto (C) perpendicularem ducere.*

Conſtr. In plano A B duc quamvis DF, ad quam ex C perpendicularem deſcribe C E. Ad eandem per E in plano A B perpendicularem duc A E M. Tum ad A M ex C perpendicularem demitte C G. Dico C G plano A B rectam eſſe.

Per G ponatur H G parallela ad D F.

Per conſtr. D E recta eſt ad C E, & E M. Ergo D E recta *a* eſt plano C E M: adeóque & *b* H G. Ergo *c* C G recta eſt ad E M. Ergo C G *d* recta eſt plano A B, Quod erat propoſitum.

a *Per* 4. *l.* 11.
b Per 8. *l.* 11.
c *Per defin.* 3. *l.* 11.
d Per 4. *l.* 11.

PROPOSITIO XII.

Fig. 19. *EX dato plani (E F) puncto (A) rectam ad datum planum erigere.*

A quovis extra planum E F puncto D fac D B ad planum *a* E F rectam. Junctaque B A duc A C parallelam D B. Dico factum. Demonſtratio patet ex 8.

Scholium.

Racticè per datum punctum perpendicularis ducitur dato plano, ſi norma O K N ad datum unctum applicetur.

PROPOSITIO XIII.

Ineæ ex eodem puncto ductæ (D C, E C) nequeunt ambæ ad idem planum (A B) ſe rectæ. Fig. 20.

Aliàs enim per 6. forent parallelæ. Quod ieri non poteſt.

PROPOSITIO XIV.

Si eadem recta (A B) ad duo plana (F G, LQ) perpendicularis eſt, plana erunt parallela. Fig. 21.

Sumatur in planorum alterutro F G uodvis punctum C, ex quo ducatur C E arallela ad A B, occurrens plano L Q in . Erit C E etiam *a* recta plano utrique 'G, L Q. Quare ſi jungantur rectæ A , B E, erunt anguli A, B *b* recti. Er- o A C, B E ſunt parallelæ. Ergo A C B parallelogrammum eſt, ac proinde

a Per 8 *l.* 11.

b Per defin. 3. *l.* 11.

c Per 29. *l.* 1.

 C E,

CE, quam jam oſtendi utrique plano eſ
d Per 34. l. 1. perpendicularem, æquatur *d* A B. E
dem modo oſtendam omnes utrique pl
e Per deſin. 8. l. 11. no perpendiculares eſſe æquales. Er
plana *e* ſunt parallela. Quod erat demo
ſtrandum.

PROPOSITIO XV.

Fig. 22. *SI rectæ duæ ſe mutuò tangentes* (*B A*, *C A*) *ad duas alias ſe mutuò tangentes* (*E*, *F D*) *ſint parallelæ, etiam plana per ipſas rectas erunt parallela.*

Ex A ducatur AG recta ad planum EF, ponanturque G H, G I, parallelæ ad D
a Per 9. l. 11. E, DF. Erunt hæ *a* parallelæ etiam ad
AB, AC. Cùm igitur anguli IGA, H
b Per deſin. 3. l. 11. G A ſint *b* recti, erunt etiam *c* CAG, B
c Per 27. l. 1. A G recti. Ergo G A, quæ ad planum E
d Per 4. l. 11. F eſt recta, etiam recta *d* eſt plano BC.
e Per præc. Ergo plana *e* B C, E F ſunt parallela.
Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 23. *PLanum* (*EHFG*) *ſecans parallela plana* (*AB*, *CD*) *in iis facit ſectiones* (*EH*, *GF*) *parallelas.*

Si non: cùm ſint in eodem plano ſe-
ante, convenient *o* alicubi in I. Quare o Per ſchol. poſt. 31. l. 1.
ùm totæ HEI, FGI ſint *a* in planis A a Per 1. l. 11.
B, CD productis, etiam hæc convenient
n I. Quod eſt abſurdum contra defini-
ionem 8. hujus.

PROPOSITIO XVII.

*P*Arallela plana rectas lineas (BD & HG) *proportionaliter ſecant.* Fig. 24.

Ducantur in planis PQ, TV rectæ B
H, DG, item BG occurrens plano RS
n F, junganturque FC, FI. Planum
rianguli BGD, ſecans parallela plana,
acit ſectiones CF, DG *a* parallelas. a Per præc.
Ergo eſt BC ad CD, ut *b* BF ad FG. b Per 2. l. 6.
Rurſum triangulum BHG, ſecans pa-
allela plana, facit ſectiones *c* BH, FI c Per præc.
parallelas. Ergo eſt HI ad IG, ut *d* BF d Per 2. l. 6.
ad FG; hoc eſt (quod jam oſtendi) ut
B C ad C D. Quod erat demonſtran-
dum.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 26. *SI recta linea (FE) ſit ad planum (AB) recta, omnia, quæ per ipſam ducuntur, plana ſunt eidem plano (AB) recta.*

Ductum ſit per FE planum aliquod GC faciens cum BA ſectionem CD. In hoc ducantur HK normales ad CD ſectionem communem. Cùm igitur etiam *o* FE recta ſit ad CD, erunt KH *a* parallelæ ad FE. Sed FE ponitur recta plano AD. Ergo GC planum *c* plano AB rectum eſt.

o *Per hyp. & defin.* 3. *l.* 11.
a *Per* 29. *l.* 1.
b *Per* 8. *l.* 11.
c *Per defin.* 4. *l.* 11.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 26. *SI duo plana (MF, GD) ſe ſecantia ſint ambo recta eidem plano (AB) erit etiam communis illorum ſectio (KL) recta plano (AB.(*

Quoniam planum MF ponitur rectum plano AB, ex def. 4. patet, ex puncto L poſſe in plano MF duci rectam perpendicularem plano AB, eam nempe, quæ ex L eſſet in plano MF perpendicularis ad communem ſectionem EF. Similiter,

quia

quia planum G D poniturperpendiculare ad A B, ex def. 4. patet, in plano G D poſſe duci ex puncto L perpendicularem plano A B. Sed ex puncto L tantùm *a* una poteſt duci perpendicularis plano A B. Ergo neceſſe eſt, ut recta, quæ ex L perpendicularis eſt plano A B, exiſtat in utroque plano M F & G D, ac proinde ſit ipſa planorum M F & G D communis ſectio L K. Quod erat demonſtrandum. *a Per* 13. *l.* 11.

PROPOSITIO XX.

SI angulus ſolidus (A) tribus planis angulis (B A C, C A D, D A B) continetur, horum duo quilibet reliquo ſunt majores. Fig. 27.

Si tres plani ſunt æquales, patet aſſertio, ſi inæquales, maximus eſto B A D. Hic nihilominus minor eſt duobus reliquis. Ex maximo enim B A D abſcinde B A E parem B A C, fiantque æquales A C, A E. Per E ducatur recta occurrens ipſis A B, A D in B & D; junganturque B C, D C. Quoniam anguli *o* B A E, B A C æquales ſunt, & latera B A, A E æqualia lateribus B A, A C, etiam baſes BE, *o Per conſtr.*

BC

a Per 4. l. 1. B C æquales *a* erunt. Quoniam verò B C, o Per 20. l. 1. C D *o* majores ſunt quàm B D, ablatis æqualibus B E, B C, remanet C D major quàm E D. Sed latera E A, A D æquantur lateribus *b* C A, A D. Ergo angulus b Per conſtr. *c* C A D major eſt quàm E A D. Cùm igitur B A C par ſit oſtenſus B A E, erunt c Per 25. l. 1. duo ſimul B A G, C A D majores toto B A D. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 28. P*Lani anguli, ſolidum angulum quemcunque componentes, quatuor rectis ſunt minores.*

Eſto ſolidus angulus A, planis angulis illum componentibus ſubtendantur rectæ B C, C D, D E, E F, F B in non plano exiſtentes. Quo facto conſtituitur pyramis, cujus baſis eſt polygonum B C D E F, vertex A, totque cincta triangulis G, H, I, K, L, quot plani anguli componunt ſolidum A. Jam verò qui a Per præc. duo anguli A B F, A B C *a* majores uno B C D, & ſic deinceps, erunt triangulorum G, H, I, K, L circa baſim anguli ſimul ſumti omnibus ſimul angulis ba-

[ba]ſeos B, C, D, E, F majores. Sed [a]nguli baſeos unà cum quatuor rectis fa[c]iunt bis tot rectos, *b* quot ſunt latera, [ſ]ive quot triangula. Ergo omnes triangu[l]orum circa baſim anguli, unà cum qua[t]uor rectis, conficiunt amplius, quàm [b]is tot rectos, quot ſunt triangula. Sed [i]idem anguli circa baſim, unà cum angu[li]s qui componunt ſolidum, componunt [b]is *c* tot rectos quot ſunt triangula. Li[q]uet ergo angulos ſolidum angulum A componentes quatuor rectis eſſe minores. Quod erat demonſtrandum.

b *Per theor 2. ſchol. p. 32. l. 1.*

c *Patet ex 32. l. 1.*

Corollarium.

EX hac & præcedenti ſatìs colligitur, ex tribus angulis planis, rectis quatuor [m]inoribus, quorum duo quilibet reliquo [ſ]int majores, ſolidum angulum conſti[t]ui poſſe.

Scholium.

EX hac eâdem propoſitione demonſtratur celebre theorema; tres tantùm figuræ planæ ordinatæ, [&] æquales, corpus continere poſſunt, nimirum [æ]quilatera triangula vel 4. vel 8. vel 20. qua[d]rata 6. pentagona 12. Ac proinde quinque tan[tùm] ſunt ordinata, ſeu regularia corpora. Pyra-mis,

mis, quæ 4. Tetraëdrum quod 8. Icoſaëdrum quod 20. æquilateris triangulis continetur; Cubus, qui 6. quadratis, Dodecaëdrum quod 12. æqualibus pentagonis ordinatis comprehenditur. Porrò corpus ordinatum dicetur; quod planis ordinatis, & æqualibus continetur.

Demonſtr. Ex duobus æquilateris triangulis non poteſt conſtitui angulus ſolidus; ad hoc enim ſaltem requiruntur tres.

A tribus triangulis æquilateris in unum punctum coëuntibus poteſt conſtitui angulus ſolidus pyramidis; ex quatuor, angulus ſolidus octaëdri; ex quinque, angulus ſolidus Icoſaëdri, cùm æquilateri trianguli anguli tum 3. tum 4. tum 5. ſint 4. rectis minores, ut colligitur ex coroll. 12. p. 32. l. 1.

b *Colligitur ex corol. 12. p. 11. l. 4.*

Quoniam verò tres anguli pentagonici b *ſunt 4 rectis minores, poterunt tria pentagona in unum punctum coëuntia conſtituere ſolidum angulum nempè Dodecaëdri.*

A tribus quadratis in unum punctum coëuntibus effici ſolidum angulum cubi, per ſe patet. Atque ita quinque exſurgunt regularia corpora.

Præter hæc nulla eſſe, ſic oſtenditur.

o *Per corol. 32. p. 32. l. 1.*

Sex anguli trianguli æquilateri conficiunt 4. rectos, unus enim facit duas o *tertias recti: ac proinde ſex tales efficient 12. tertias recti, hoc eſt rectos 4. Ergo à ſex æquilateris triangulis non poterit effici ſolidus angulus, multò minùs à pluribus.*

A quatuor quadratis non poſſe conſtitui ſolidum angulum, ac multò minùs à pluribus, per ſe patet.

Anguli pentagonici 4. ſunt 4. rectis majores, ſi...

ſanguli enim efficiunt 6. quintas e recti. Ergo à e quatuor pentagonis nequit fieri angulus ſolidus, multò minùs à pluribus. e Per corol. p. 11. l. 4.

Nec ſanè ex aliis figuris quibuſlibet ordinatis conſtitui poterit ſolidus angulus. Tres anguli hexagonici f ſunt 4. rectis æquales, unus enim facit 4. tertias recti, ac proinde tres faciunt 12. tertias recti, hoc eſt 4. rectos. Ergo ex tribus hexagonis nequit conſtitui ſolidus angulus, multò minùs à pluribus. f Per corol. 2 p. 15. l. 4.

Cùm vero tres anguli hexagonici ſint 4. rectis æquales, tres anguli figurarum quarum libet hexagono majorum, ut ſeptagoni, octagoni &c. 4. rectis majores erunt. Quare manifeſtum eſt, reliquas figuras ordinatas omnes eſſe ineptas, ut ſolidum angulum conſtituant, adeóque præter jam dicta 5. nulla ordinata corpora dari poſſe.

PROPOSITIO XXII. & XXIII.

ADmodum prolixæ ſunt ac moleſtæ tyronibus, & ferè uſu non veniunt.

PROPOSITIO XXIV.

PLana parallelepipedum continentia (1.) ſunt parallelogramma. (2.) quæ ex adverſo, ſunt ſimilia & (3.) æqualia. Fig. 29.

1. Pars. Planum A F ſecans plana BD, FH, ex defin. 13. parallela, facit a ſectiones B A, F E parallelas. Rurſum planum a Per 16. l. 11.

AF ſecans plana AH, BG, per defin. 13. parallela, facit b ſectiones AE BF parallelas. Ergo BEFA parallelogrammum eſt. Simili argumento reliqua parallelepipedi plana ſunt parallelogramma.

b *Per eand.*

2. Pars. Quoniam ex primâ parte patet, AB, BC parallelas eſſe EF, FG, erunt c anguli ABC, EFG pares. Quare cùm & latera alternis ſint paria, ſimilia ſunt parallelogramma adverſa BD, FH. Eodem modo probatur de cæteris oppoſitis.

c *Per* 10. *l.* 11.

3. Pars patet ex primâ parte, & 4. vel 8. 1.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 30.

SI parallelepipedum (GF DI) aut quodvis priſma plano (NP) ſecetur adverſis planis parallelo, erit ut baſis (DCPO) ad baſim (OPFE) ita ſolidum (GP) ad ſolidum (NF.)

Demonſtrabitur eodem modo, quo 1. 6.

Corollarium.

Priſma ſectum plano adverſis planis paral-

lelo, ſectionem habet ſimilem & æqua-
ũ planis adverſis.

ROPOSITIO XXVI. XXVII.

Oñ ſunt neceſſaria.

PROPOSITIO XXVIII.

Lanum per adverſorum planorum diame- Fig. 29.
tros (AC, EG) tranſiens parallelepi-
tum ſecat in duo æqualia priſmata.

Quoniam *a* BC, BE ſunt parallelo- a Per 24.
ramma, CG, AE æquidiſtant eidem l. 11.
F. Ergo & *b* inter ſe ſunt parallelæ, ac b Per 9.
oinde in uno ſunt plano. Ergo rectæ A l. 11.
, EG *c* in uno ſunt plano: Jam verò c Per 7. l.
anum per illas ductum ſecare parallepi- 11.
dum in duo priſmata æqualia, ſic o-
endo. Intelligatur priſma AEGGD
ſupra planum ſuum EACG ita conſti-
i, ut anguli D, H vergant ad angulos
F. Manifeſtum eſt tum adhuc fore in-
r parallela plana BADC, FEHG,
ũm verò neceſſe eſt, ut D cadat in B, &
i F. Cadat enim D extra B, ſi fieri
teſt, in N. Angulus BAC æquatur *d* d Per 27.
gulo DCA. Sed DCA æquatur NA l. 1.

Q 2 C

C (eſt enim unus idemque angulus) Erg
BAC & NAC æquales ſunt: quod eſt a
ſurdum. Ergo D incidit in B, & pari
e Per ax. 7. causâ H e in F. Ergo priſma AEGCD
congruit priſmati ACGEFB, ac proin
de æqualia ſunt.

PROPOSITIO XXIX. & XXX.

Fig. 31. *PArallelepipeda (FEAGKIMC & FE BHLOMI) quæ eandem habent baſim (EFIM) & altitudinem eandem, ac proinde exiſtunt inter parallela plana (EFIM, GAOL) æqualia ſunt.*

Vel enim exiſtunt inter lateralia parallela plana EAOM, & FGLI, vel non. Eſto primum. Ex 24. hujus, & 8. l. 1. patet, triangula AEB, CMO, item GFH, KIL ſibi mutuò æquilatera & æquiangula eſſe. Quare, ut in præcedenti, oſtendam priſmata CMOLIK, AE BHFG ſibi mutuò impoſita congruere, a Per ax. 7. ac proinde a æqualia eſſe. Quare addi communi ſolido FEAGKIMC, F BHLOMI æqualia erunt. Quod er demonſtrandum.

Fig. 32. Sit deinde parallelepipedum FXQ

IPR non inter eadem lateralia plana
rallela exiſtens cum parallelepipedo F
AGKCMI. Quoniam ex hypotheſi
K, AC, RP, QX ſunt in uno pla-
ad baſim EFIM parallelo, RP, Q
ſecent GK in L & H, AC verò in O
B, junganturque EB, MO, FH, IL;
cile oſtenſu eſt plana ſolidum FEBH
OMI continentia parallelogramma eſ-
ex adverſo æquidiſtantia, adeóque ſo-
dum illud *c* eſſe parallelepidum. Sed *c Per defin. 13. l. 11.*
uic per primam partem parallelepipeda
XQEMIPR, & FEAGKCMI
int æqualia. Ergo etiam ſunt æqualia in-
er ſe. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

HÆc propoſitio ſimilis eſt propoſitioni 35. lib. 1. affirmat enim de ſolidis, quod illa de planis. uare ſimilis etiam erit reliquorum caſuum de-onſtratio.

PROPOSITIO XXXI.

Arallelepipeda ſuper æqualibus baſibus (A O & EG) & in eâdem altitudine (S) nt æqualia. Fig. 33.

Habeant parallelepipeda primò latera l baſes normalia. Ad latus FG produ-

ctum fiat parallelogrammum G M K æquale ac ſimile parallelogrammo G PR, rectæ P M, R G occurrant ipſi H in Q & L. Jam verò intelligantur ſ per G K, G Q, G P conſtitui parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta, altitudo autem omnium communis ſit S, ſolidum E G S eſt ad ſolidum GPS ut E G *b* ad G P; hoc eſt (quia E G, A O per hyp. æquantur) ut A O ad G P; hoc eſt per conſtr. ut G K ad G P; hoc eſt ut *c* G Q ad G P; hoc eſt *d* ut ſolidum G Q S eſt ad idem ſolidum G P S. Quoniam igitur ſolida E G S & G Q S eandem *habent* rationem ad ſolidum G P S, erit *ſolidum* EG S *o* æquale G Q S; hoc eſt ſolido *e* G K S: hoc eſt (quia baſes, G K, A O *ſunt* *f* æquales & ſimiles) ſolido *i* A O S. *Quod* erat propoſitum. *Per totum diſcurſum ſolida accipiuntur recta.*

b Per 25. l. 11.
c Per 35. l. 1.
d Per 25. l. 11.
o Per 9. l. 5.
e Per 29. l. 11.
f Per conſtr.
i Patet ex 29. l. 11. imò per ſe.

Habeant deinde parallepipeda data E G S, E G S, A O S latera ad baſes E G & A O obliqua. Fiant ſuper E G, A O parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta in altitudine S, hæc æqualia erunt obliquis per 29. aut 30. Quare cùm parallelepipeda recta per primam partem ſint paria inter ſe, erunt & obliqua æ-

qua-

qualia. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXII.

PArallelepipeda quævis æquè alta ſunt inter ſe ut baſes. Fig. 34.

Baſes ſint C O, & A, ſuper C O fac parallelogrammum O E par ipſi A.

Super B C, O E intelligantur erigi parallelepipeda in altitudine K: hæc igitur partes erunt unius parallelepipedi B E K. Ergo *a* parallelepipedum O E K eſt ad parallelepipedum B C K, ut baſis O E ad baſim B C; hoc *b* eſt, ut baſis A ad baſim B C. Sed quia baſes O E & A ſunt æquales, parallelepipeda O E K & A K *c* æqualia ſunt. Ergo etiam parallelepipedum A K eſt ad parallelepipedum B C K, ut baſis A ad baſim B C. Quod erat demonſtrandum.

a *Per.* 25. *l.* 11.
b *Per conſtr.*
c *Per præc.*

Scholium.

QUod hîc de parallepipedis oſtenſum eſt, demonſtrabitur in libro 12. *de pyramidibus prop.* 6. *de quibuſlibet priſmatibus in corollario* 1. *poſt p.* 9. *de conis & cylindris prop.* 11.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig 35. *Similia parallelepipeda (HA & CM) ſunt in triplicatâ ratione laterum homologorum (AB, BC.)*

Sint parallelepipeda AH, CM ſimilia. Ergo omnia ipſorum plana ſimilia *a* ſunt; adeóque AB ad BC *b* eſt ut EB ad BO; & ut FB ad BG, ſic EB ad BO. Inſuper & anguli *c* planorum æquales ſunt. Collocentur ſic igitur ſolida AH, CM, ut æquales anguli CBO, ABE ſint oppoſiti, & latera AB, CF in directum; tum verò etiam *d* EB, OB in directum erunt. Cogitentur jam ſuper planis BQ & EC facta ſolida, ſicut ſolida KB, HA ſint unum parallelepipedum, & KB, PO faciant unum ſimiliter parallelepipedum, & PO, CM unum quoque parallelepipedum conficiant. Solidum HA eſt *e* ad ſolidum KB, ut AE ad BR; hoc eſt ut *f* AB ad BC; hoc eſt (ut per hyp. oſtendi ſuprà) ut EB ad BO; hoc eſt ut *g* EC ad BQ; hoc eſt ut ſolidum *i* idem KB ad ſolidum PO. Continuant ergo eandem rationem tria ſolida HA, KB, PO. Jam verò ſolidum KB eſt ad ſolidum PO, ut *k* baſis BR ad baſim BQ; hoc

a Per deſin. 6 *l.* 11.
b Per deſin. 1. *l.* 6.
c Per eand.
d Patet ex 15. *l.* 1.
e Per 25. *l.* 11.
f Per 1. *l.* 6.
g Per eand.
i Per 25. *l.* 11.
k Per eand.

oc eſt ut *l* E B ad B O; hoc eſt ut *m* F B ad B G, hoc eſt, *n* ut planum F C ad planum B S; hoc eſt, ut idem *o* rurſus ſolidum P O ad C M ſolidum. Quatuor ergo ſolida H A, K B, P O, C M ſunt continuè proportionalia. Ergo ratio primi H A ad quartum CM eſt *p* triplicata rationis primi H A ad K B ſecundum; hoc eſt rationis *q* A E ad B R; hoc eſt *r* rationis homologorum laterum A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

l Per 1. l. 6.
m Oſtendi ſuprà ex hyp.
n Per l. 1. 6.
o Per 25. l. 11.
p Per defin. 10. l. 5.
q Per 25. l. 11.
r Per 1. l. 6.

Scholium.

Quod hîc de parallelepipedis oſtenſum eſt, in libro 12. demonſtrabitur de pyramidibus prop. 8. de quibuſlibet priſmatibus coroll. 2. poſt p. de conis & cylindris p. 12. de ſphæris p. 18.

PROPOSITIO XXXIV.

Si parallelepipeda æqualia ſunt (B M, C K) reciprocant baſes & altitudines (hoc eſt, baſis A M eſt ad baſim F K, ut reciprocè altitudo F C ad altitudinem A B.) Fig. 36.

Et ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.

1. Pars. Sint primò latera ad baſes recta. Si jam ſolidorum B M, C K altitudines ſint pares, res patet.

Si altitudines ſint inæquales, à maj
F C abſcinde F E parem B A: & per
duc planum E L ad F K parallelum. Ba
A M eſt ad baſim F K, ut ſolidum *b* B
ad ſolidum E K; hoc eſt (quòd ex hy
paria ſint ſolida B M, C K) ut ſolid
C K ad ſolidum E K. Hoc eſt ut *c* C G
ad E G; hoc eſt ut *d* C F ad E F; hoc
ex conſtr. ut C F reciprocè ad B A. Quo
erat demonſtrandum.

b Per 32. l. 11.
c Per 25. l. 11.
d Per 1. l. 6.

Sint deinde latera ad baſes obliqua. E-
rigantur ſuper iiſdem baſibus in altitudi-
ne eâdem parallelepipeda recta. Erunt
his obliqua *e* parallepipeda æqualia. Qua-
re cùm hæc per 1. partem reciprocent ba-
ſes & altitudines, etiam illa reciproca-
bunt. Quod erat demonſtrandum.

e Per 29. & 30. l. 11.

2. Pars. Sint altitudines inæquales, la-
teraque ad baſes recta, & ex majori C F
ipſi B A ſume parem E F. Solidum B M
eſt ad ſolidum E K, ut *f* A M ad F K: hoc
eſt ex hyp. ut C F ad B A; hoc eſt ex
conſtr. ut C F ad E F; hoc eſt ut *g* C G a
E G; hoc eſt ut ſolidum *i* C K ad ſolidu
idem E K. Ergo ſolida B M & C K ean-
dem habent rationem ad E K. Ergo ſunt
paria. Quod erat demonſtrandum.

f Per 23. l. 11.
g Per 1. l. 6.
i Per 25. l. 11.

Corollaria.

QUæ de parallelepipedis demonſtrata ſunt Prop. 29. 30. 31. 32. 33. 34. etiam conveniunt priſmatis triangularibus; quæ ſunt dimidia parallelepipeda, ut patet ex p. 28. Igitur,

1. Priſmata triangularia æquè alta ſunt ut baſes A, B. *Fig.* 37.

2. Si ſimilia fuerint, eorum proportio triplicata eſt proportionis laterum æqualibus angulis oppoſitorum.

3. Si æqualia ſunt, reciprocant baſes & altitudines: & ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.

Scholium.

QUod hic propoſ. 34. *oſtenſum eſt de parallelepipedis, demonſtrabitur in libro* 12. *de pyramidibus p.* 9. *de priſmatis quibuſcunque coroll.* 3. *poſt. p.* 9. *de conis & cylindris. p.* 15.

PROPOSITIO XXXV.

VAldè prolixa, ſervit ſequenti, quam ſine illâ demonſtrabimus.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 38. *Parallelepipedum (DH) ex tribus rectis proportionalibus (A, B, C) factum æquatur parallelepipedo (IN) facto à mediâ (B) & æquiangulo priori.*

Parallelepipedi D H baſis F D habeat latus E F æquale A, & latus alterum *ED* æquale C: latus verò F G baſi inſiſtens æquale mediæ B. Erit parallelepipedum D H factum ex tribus rectis A, B, C. Parallelepipedi deinde I N tria latera L X, I X, X M (ac proinde omnia reliqua) ſint æqualia mediæ B; & angulus ſolidus X ſit æqualis angulo ſolido E. Erit parallelepipedum I N factum ex mediâ B, & priori æquiangulum. Dico etiam eſſe æquale.

Cùm enim per hyp. & conſtr. ſit ut F E ad L X, ita reciprocè I X ad D E, erunt *a* baſes D F, I L æquales. Jam quia anguli ſolidi ad E & X ſunt æquales, ſi ponantur intra invicem, *b* congruent, & ob æqualitatem rectarum E G, X M, puncta M, G coincident. Quare una erit utriuſque ſolidi altitudo, perpendicularis nempe à punctis M, G, jam congruentibus, in

a Per 14. *l.* 6.
b Per *defin.* 11. *l.* 11.

planum baſeos demiſſa. Solida *c* igitur DH, IN æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum. *c Per 31. l. 11.*

Scholium.

Hic porrò obſervabimus, id quod magnum habet uſum, ex tribus lineis, quomodocunque inter ſe ductis, ejuſdem magnitudinis ſolidum gigni.

ABC. CAB. BCA.

1 2 3

In ſchemate hic appoſito duæ primæ literæ deſignant baſim, tertia altitudinem. Comparemus primum cum ſecundo.

Baſis AB eſt ad baſim CA per 2.6. ut B latus ad C latus; hoc eſt reciprocè ut B altitudo ad C altitudinem. Ergo per 34.

ABC. Æ. CAB.

Eodem modo oſtendes primum tertio, & tertium ſecundo eſſe æqualia.

PROPOSITIO XXXVII.

PArallelepipeda ſimilia, ſimiliterque à lineis proportionalibus deſcripta, etiam ipſa ſunt proportionalia: & è converſo.

Patet ex 34. l. 5. Rationes enim parallelepipedorum per 33. hujus erunt dupli-

ca-

catæ rationum ex hyp. æqualium, quas habent lineæ.

Converſa patet ex 35. l. 5.

Propoſitio vera eſt de quibuſcunque ſimilibus corporibus, quæ patebit l. 12. duplicatam habere laterum rationem.

PROPOSITIO XXXVIII. & XXXIX.

Nihil continent memorabile, & vix ullius ſunt uſus.

PROPOSITIO XL.

Fig. 39. & 40. *SI fuerint duo priſmata triangularia æqualis altitudinis (ABFGOC & IKLPXQ) quorum unum baſim habeat parallelogrammum (OB) duplam baſeos alterius (IKL) quæ triangula ſit, priſmata erunt æqualia.*

Nam ſi perficiantur parallelepipeda K R & CH, erunt hæc æqualia *a* ob baſium CA, MK, & altitudinum æqualitatem. Ergo etiam priſmata ipſorum *b* dimidia æqualia erunt. Quod erat demonſtrandum.

a Per 31. l. 11.

b Per 28. l. 11.

Scho-

Scholium.

EX hactenus demonſtratis habetur dimenſio priſmatum triangularium, & quandrangularum, ſeu parallelepipedorum, ſi nimirum altitudo ducatur in baſim, ut ſi altitudo ſit 10. *pedum, baſis verò pedum quadratorum* 100. (*menſurabitur autem baſis per ſchol. p.* 36. *vel* 41. *l.* 1.) *multiplica* 10. *per* 100. *proveniunt* 1000. *pedes cubici pro ſoliditate priſmatis dati.*

Demonſtratio facilis eſt. Nam quemadmodum rectangulum, ita & parallelepepidum rectum producitur ex altitudine ductâ in baſim. Ergo etiam quodvis parallelepipedum producitur ex altitudine in baſim ductâ, cùm per 31. *æquale ſit parallelepipedo rectâ ſuper eâdem baſi ad eandem altitudinem conſtituto.*

Deinde cùm totum parallelepipedum producatur ex altitudine in totam baſim, ſemiſſis parallelepipedi (hoc eſt priſma triangulare per 28.) *producetur ex altitudine ductâ in dimidiam baſim; triangulum nempè IL K.*

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER DUODECIMUS.

NOBIS OCTAVUS.

QUod in libris præcedentibus hactenus præſtare coneti ſumus, ut Mathematum elementa ad faciliorem ac breviorem mothodum revocaremus, id in primis præſtandum erit in hoc libro duodecimo, cujus doctrina cùm maximè ſit neceſſaria, demonſtrationes adeò ſunt prolixæ, ut tyrones in deſperationem plerumque conjiciant. Huic incommodo ita mederi propoſitum nobis eſt, ut tamen à rigore Geometricæ demonſtrationis non recedamus. Quod utrùm ſimus aſſecuti, lector intelliget, ſi hæc noſtra cum Euclideâ prolixitate contulerit.

DEFINITIONES.

Fig. 1. *lib.* 12. *tabulâ.* 5. 1. PYramis eſt ſolidum (ZL) triangulis (ALC, CLF, FLB, BLA) comprehenſum ab uno plano (Z)

[Z]) ad unum punctum (L) conſtitu-

Planum Z baſis dicitur, & eſſe poteſt
[ve]l triangulum, vel quadrangulum, vel
[cuju]svis alia figura; ex cujus lateribus ſin-
[gu]lis triangula ſurgunt in unum punctum
[(L)] quod vertex dicitur, coëuntia.

Ut triangulum inter rectilineas figuras planas, pyramis inter ſolidas prima & ſimpliciſſima

2. Si extra planum alicujus circuli Fig. 23.
[(]CL) acceptum fuerit punctum (A) adeò-
[q]ue ducatur recta infinita (AF) tangens
[ci]rculum in C, quæ, puncto (A) ma-
[ne]nte fixo, circa peripheriam circuli
[c]onvertatur, donec in eum locum (AC
) redeat, unde moveri cœperat, ſu-
[p]erficies à rectâ lineâ (ACF) deſcripta
[di]citur conica ſuperficies, corpus verò,
[q]uod hac ſuperficie & circulo (CL) con-
[ti]netur, conus vocatur.

Vertex coni eſt A.

Baſis coni eſt circulus CL.

Axis coni eſt recta (AB) ex vertice ad
[ba]ſeos centrum ducta.

Latus coni eſt recta (AC) à vertice
[ad] baſeos circumferentiam ducta, quam

R eſſe

eſſe totam in coni ſuperficie, ex ejus ge-
neſi eſt manifeſtum.

a Fig. 2. Conus *a* rectus eſt, cùm axis (AB) eſt
baſi rectus.

b Fig 3. Conus *b* ſcalenus, ſeu obliquus eſt, cùm
axis (AB) non eſt ad baſim rectus.

*Fit etiam conus rectus à triangulo rectangu-
(CBA) circa unum latus perpendiculare (AB)
in orbem ducto. Vide Fig. 2.*

Fig. 4. 5. 3. Si circa duos circulos æquales & pa-
rallelos (CL, OQ) recta linea infinita
(COF) convertatur, donec in locum
redeat, unde moveri cœpit, ſic ut mota
ſibi ipſi ſemper parallela maneat, ſuper-
ficies à rectâ (COF) deſcripta dicitur
cylindrica ſuperficies: corpus verò, quod
hac ſuperficie & binis circulis continetur,
cylindrus vocatur.

Baſes cylindri ſunt circuli (CL, OQ.)

Axis cylindri eſt recta (AB) baſium
centra connectens.

Latus cylindri eſt recta (OC) in cylin-
dri ſuperficie utramque baſim tangens.

Fig. 4. Rectus cylindrus eſt, cùm axis ad ba-
ſes rectus eſt.

Fig. 5. Scalenus cylindrus dicitur, cùm axis
ad baſes non eſt rectus.

F

Fit etiam cylindrus rectus à rectangulo (OCA) circa unum latus (BA) in orbem du... Vide Fig. 4.

4. Similes coni & cylindri ſunt, quo...m axes (AC, ZO) & baſium diame...i (BF, QR) ſunt proportionales. Fig. 20. & 21.

5. Sphæra eſt ſolidum comprehenſum ...â ſuperficie, ad quam omnes rectæ li...æ à quodam puncto intra ipſam poſito ...ctæ ſunt æquales.

Punctum illud centrum dicitur.

Sphæræ diameter eſt recta per cen...um ducta ad ſuperficiem utrimque per...ngens.

Generatur ſphæra, ſi ſemicirculus cir... diametrum (AF) immotam conver...tur. Fig. 6.

6. Magnitudines figuræ alicui inſcri...æ, aut circumſcriptæ, ſive figurâ mi...ores vel majores, in figuram deſinere ...cuntur, cùm ab eâ tandem differre poſ...nt quantitate minori quâcunque datâ, ... quantumvis parvâ.

Itaque ſi ea, quæ figuræ alicui inſcribuntur, ab ...ndem deficiant defectu minori quocunque da... inſcripta dicentur in figuram deſinere: Et ſi ea, ... alicui figuræ circumſcribuntur, excedant eam

tandem exceſſu minori quocunque dato, dicentur rurſum circumſcripta deſinere in figuram.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 6. & 7. *POlygonorum ſimilium circulo inſcriptorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum (AF, IC.)*

a Per deſin. 1. l. 6. Ducantur *a* AO, BF, IR, LC. Quia polygona ponuntur ſimilia, æquales erunt anguli OBA, RLI, & latera OB, BA proportionalia lateribus RL, LI. Ergo

b Per 6. l. 6. in triangulis OAB, RIL *b* anguli O & R æquantur. Ergo etiam BFA & LCI, qui iiſdem arcubus BA, LI inſiſtunt, ſunt *c* æquales. Anguli verò FBA, CLI in ſemicirculis ſunt *d* recti, ac proinde

c Per 21. l. 3.

d Per 31. l. 3. æquales. Ergo reliqui BAF, LIC *e* æquantur. Quoniam igitur triangula FAB, CIL ſibi mutuò æquiangula ſunt,

e Per corol. p. 32. l. 1.

f Per 1. l. 6. erunt *f* ſimilia, eritque BA ad LI, ut AF ad IC. Jam quia per hyp. polygona ſunt ſimilia, erit proportio eorum dupli-

i Per 20. l. 6. cata *i* proportionis laterum BA, LI; hoc eſt, ut jam oſtendi, duplicata proportionis diametrorum AF, IC. Quod erat demonſtrandum.

Co

Corollaria.

POlygonorum ſimilium circulo inſcriptorum ambitus ſunt inter ſe, ut diametri. *Fig. 6. & 7.*

Cùm oſtenſum jam ſit A B eſſe ad L I, ut A F ad I C, etiam O B erit ad R L, ut A F ad I C, & ſic de cæteris lateribus. Ergo per 12. 5. omnia ſimul latera ad ſimul omnia, hoc eſt, ambitus ad ambitum ſunt ut A F ad I C.

Lemma.

POlygona circulo inſcripta in circulum deſinunt. *Fig. 8.*

Inſcribe quadratum A C B D. Cùm hoc dimidium ſit quadrati *a* circulo conſcripti, erit majus dimidio circuli. Quare ſi hoc auferatur è circulo, auferetur plus quàm dimidium. Deinde ſingulis arcubus biſectis in in E, K, I, H inſcribe octogonum: & in E tangat F G, cui B C, D A occurrant in G & F; Erit C F parallelogrammum, cujus cùm dimidium ſit triangulum *b* C E A, erit hoc plus quàm dimidium ſegmenti C E A. Eodem modo ſingula triangula A K D, D I B &c.

a Per ſchol. poſt. 6. & 7. l. 4.

b Per 41. l. 1.

 ſin-

ſingulorum ſegmentorum plus ſunt quàm dimidia. Ergo omnia triangula omnium ſegmentorum plus quàm dimidia ſunt. Hæc ergo ſi ex illis, hoc eſt ex reſiduo circuli, auferas, plus quàm dimidium auferetur. Pari argumento ſi inſcribantur circulo polygona duplò ſemper plurium laterum, oſtendam è reſiduo circuli ſemper auferri plus quàm dimidium. Ergo reſiduum erit tandem *c* minus quocunque dato, ac proinde polygona inſcripta tandem à circulo deficient quantitate minori datâ quâcunque, hoc eſt in circulum *o* deſinent. Quod erat demonſtrandum.

c *Patet ex lem.* 2. *Schol. poſt.* 11. *l.* 6

o *Per defin.*

PROPOSITIO II.

Fig. 6. & 7.

Circulorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum.

Polygonorum ſimilium circulo ſine ſine inſcriptorum proportio ſemper duplicata *a* eſt proportionis diametrorum. Atqui polygona, circulo in infinitum inſcripta, in circulum *b* deſinunt. Ergo per poriſma univerſale ſequens, etiam circulorum proportio duplicata eſt proportionis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

a *Per* 1. *l.* 12.

b *Per lem.*

Pe-

Poriſma univerſale.

...ea, quæ duabus figuris (A, B) inſcribuntur, in ipſas deſinant, quam proportionem inter ſe ſemper habent inſcripta, eandem habent figuræ.

B X Z.
F

Sit ratio X ad Z ea, quam inſcripta ſemper habent inter ſe. Si ergo negas, rationem figurarum A, B eandem eſſe cum ratione X ad Z, quam ſemper habent ea, quæ figuris inſcribuntur, ſit ratio A ad B primò major ratione X ad Z. Ergo alia quædam quantitas R, minor quàm figura A, erit ad figuram B, ut X ad Z. Quoniam inſcripta per hyp. deſinunt in figuras A & B, erunt aliqua figuris A & B inſcripta, quæ ab ipſis deficiant *a* minori quantitate, quàm R deficiat à figurâ B. Sint ea C & F. Ergo C erit majus quàm R. Ergo C eſt ad B in *b* majori, quàm R ad B; hoc eſt (ut ponebatur) quàm X ad Z, hoc eſt per hyp. quàm idem C ad F. Quoniam igitur C eſt ad B in majori proportione, quàm ad F, erit B figura minor ſibi inſcripto F, totum ſuâ parte. Eodem modo oſtendetur, rationem B ad A non

a *Per defin. 6. l. 12.*
b *Per 8. l. 5.*
c *Per 10. l. 5.*

non poſſe eſſe majorem ratione Z ad X. Ergo ratio A ad B æqualis eſt rationi X ad Z. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III. & IV.

SUnt prolixæ & difficiles tyronibus, nec alium habent uſum, quàm ut per eas demonſtretur quinta, quam nos ſine illis multò facilius demonſtrabimus.

Lemma ad P. 5.

Fig. 9 *SI duæ pyramides triangulares ſecentur planis (OSE, RXZ) ad baſes (ABC, IQV) parallelis, quæ dividant latera (CF, QL) proportionaliter (in E & Z) erunt (OSE, RXZ) inter ſe ut baſes (ACB, IQV.)*

Quoniam parallela plana OSE, ABC ſecantur à planis BFC, AFB, AFC, erunt ſectiones communes SE, BC, &
a Per 16. l. 11. OS, AB, & OE, AC *a* parallelæ. Ergo anguli OSE, ABC, & SOE, BAC, & OES, ACB, bini & bini, æqua-
b Per 10 l. 11. les *b* ſunt. Quare ſectiones OSE, ABC
c Per 4. l 6 *c* ſunt ſimiles. Eodem modo ſimiles eſſe oſtendam ſectiones RXZ, IVQ. Ergo ratio ſectionis ABC ad OSE eſt dupli-
d Per 19. l. 6. cata *d* rationis laterum: BC ad SE; & ratio

o ſectionis I V Q ad R X Z duplicata eſt
ctionis V Q ad X Z. Atqui rationes B C
d S E, & V Q ad X Z ſunt eædem (eſt
nim B C ad S E, ut *e* C F ad E F; hoc eſt *e Per corol. p. 4. l. 6.*
er hyp. ut Q L ad Z L; hoc *f* eſt ut V Q *f Per idem corol.*
d X Z.) Ergo ratio A B C ad O S E ea-
em eſt *i* cum ratione I V Q ad R X Z. *i Per 35. l. 5.*
Quod erat propoſitum.

II.

P*Yramidi (Z C A F) triangulum habenti baſim priſmata in infinitum inſcripta deſinunt in ipſam pyramidem.* *Fig. 10.*

Dividatur latus pyramidis in aliquot æquales partes A B, B G, G F, & per B, G factis ſectionibus G D N & B E P baſi Z A C parallelis inſcripta intelligantur pyramidi priſmata triangularia B E P M A O, & G D N K B Q. His deinde extra pyramidem continuatis, intelligantur pyramidi eſſe circumſcripta priſmata C I B A, P X G B, N H F G. Exceſſus circumſcriptorum ſupra inſcripta ſunt ſolida I M, X K, H G, quæ ſimul ſumta æquantur priſmati C I B A: nam H G eſt *o* æquale D B, ac proinde H G cum X K *o Per 25. l. 11.*
æquatur P X G B, hoc eſt *p* M E B A. *p Per eand.*

Ergo tria HG, KX, IM æquantur tot CIBA. Atqui ſi AF in plures ſine fin partes æquales dividatur, ac proind priſmatum numerus in infinitum multi- a Collig. ex lem. 2. Schol. poſt 11. l. 6. plicetur, AB fiet *a* quâvis datâ minor. Ergo etiam *b* priſma CIBA fiet quovis dat minus. Ergò priſmatum circumſcripto- b Patet ex 25. l. 11. rum (multoque magis pyramidis ZCAF, quæ pars eſt priſmatum ſibi circumſcriptorum) exceſſus ſupra inſcripta priſma- c Per defin. 6. l. 11. ta in pyramidem *c* tandem deſinunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.

Fig. 11. *PYramides triangulares æquè altæ eam inter ſe proportionem habent, quam baſes (AQR, ESX.)*

Pyramidum altitudines æquales referant latera AP, EZ, quibus in, quot placuerit, æquales partes, ſed æquè multas, utrimque diviſis, factiſque per diviſionum puncta ſectionibus ad baſes parallelis, intelligantur utrique pyramidi inſcripta eſſe priſmata trigona æquè mult & æquè alta. Jam verò quia priſmata LA IF ſunt æquè alta, erit priſma LA a a Per corol. 1. p. 34. l. 11. priſma IE, ut *a* baſis LOB ad baſim INK hoc

hoc eſt *b* ut baſis QRA ad baſim SXE. b Per lem 1.
Eodem modo oſtendam, ſingula priſmata pyramidi QPAR inſcripta eſſe ad ſingula inſcripta pyramidi SZEX, ut baſis QAR ad baſim SEX. Ergo etiam *c* ſimul omnia ſunt ad omnia, ut baſis ad baſim. Quare cùm ea tandem deſinant *d* in ipſas pyramides, etiam ipſæ erunt *e* ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

c *Per 12. l. 5.* d *Per lem. 2.* e *Per poris. univerſ. poſt. ſ. 2. l. 16.*

PROPOSITIO VI.

Fig. 12. & 13.

PYramides quæcunque æquè altæ eam inter ſe rationem habent, quam baſes (AB, CFO.)

Reſolvantur baſes in triangula A, B, C, F, O; pyramides verò totæ in pyramides triangulares. Pyramis AX eſt ad pyramidem OZ, ut *a* A ad O; & pyramis *b* BX eſt ad pyramidem OZ, ut B ad O. Ergo pyramides ſimul AX, BX (hoc eſt tota ABX) ſunt ad pyramidem OZ, ut A, B *c* ſimul ad O. Eodem diſcurſu pyramis ABX eſt ad pyramidem FZ, ut *d* AB eſt ad F: Et ABX eſt ad CZ, ut *e* AB eſt ad C. Ergo ABX *f* eſt ad tres ſimul OZ, FZ, CZ, hoc eſt ad totam pyramidem OFCZ, ut AB ad OFC. Quod erat demonſtrandum.

a *Per præc.* b *Per eand.* c *Per 24. l. 5.* d *Per præc.* e *Per 24. l. 5.* f *Per eand.*

PRO-

PROPOSITIO VII.

OMnis pyramis tertia pars eſt priſmatis ha- bentis eandem baſim & altitudinem.

Fig. 14. Sit primò pyramis trigona B G A C in eâdem baſi & altitudine cum priſmate B ACFEO, ducantur BF, AO, AF. a Per 34. l. 1. Triangula BFC, BFO ſunt *a* paria. Er- b Per 5. l. 12. go pyramis BFCA pyramidi BOFA *b* æqualis eſt. Ob eandem cauſam pyramis OEAF par eſt pyramidi OBAF, hoc eſt pyramidi BOFA, ſunt enim eædem py- ramides. Igitur etiam BFCA, & OEA F æquales ſunt. Omnes igitur tres BFC A, OEAF, OBAF, ſive BOFA ſunt pares. Ergo tres ſimul unius BFCA tri- plæ ſunt. Atqui tres illæ conſtituunt priſ- ma BACFEO. Illud ergo pyramidis B c Per 5. l. 12. FCA, hoc eſt *c* BGAC, triplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 15. Sit deinde pyramis quævis eandem ha- bens baſim & altitudinem cum priſmate AEFH, ductis lineis BC, BO, BE & N I, NG, NH, reſolve priſma in triangu- laria priſmata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet demonſtratio ex primâ parte. Nam ſingulæ partes pri- ſma-

ſmatis triplæ erunt ſingularum partium pyramidis. Ac proinde totum priſma totius pyramidis triplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIII.

Similium pyramidum (*O A C B*, *K H I N*) *proportio eſt triplicata ejus, quam habent homologa latera* (*A B*, *H N*.) *Fig.* 16.

Sint primò trigonæ; perfectis parallelogrammis AM & HQ, ſuper his conſtitue parallelepipeda A G, H L, in altitudine pyramidum, quæ cùm pyramides ſint ſimiles, etiam patet ſimilia *a* eſſe. Ducantur jam E F, R P, & per E F, C B, item per RP, IN ſecabuntur *b* parallelepipeda in duo priſmata æqualia: ſingula horum *c* tripla ſunt pyramidum O A C B, & K H I N. Utraque ergo ſimul, hoc eſt, tota parallelepida A G, H L, ſextupla ſunt pyramidum. Pyramides ergo parallepipedis proportionales ſunt. Sed horum ratio *d* triplicata eſt rationis laterum A B, H N. Ergo & illarum. Quod erat demonſtrandum.

a *Defin.* 9. *l.* 11.
b *Per* 28. *l.* 11.
c *Per præc.*
d *Per* 33. *l.* 11.

Quòd ſi pyramides ſimiles fuerint polygonæ, reſolvantur in triangulares AR, *Fig.* 17.

BR,

e Ex 20. & 5. l. 6. & ex defin. 9. l. 11.

BR, CR, & OK, EK, FK, facilè e oſtendes etiam AR ipſi OK, & BR ipſi E R, & CR ipſi FK eſſe ſimiles. Ergo per 1. partem ratio pyramidum AR, OK eſt triplicata rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum BR & EK triplicata eſt rationis MX ad SZ; hoc eſt denuò per hyp. rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum CR, FK eſt triplicata rationis XQ ad ST, hoc eſt rurſum IM ad PZ. Cùm ergo ratio ſingularum ad ſingulas ſit triplicata rationis IM ad PZ, etiam ratio *c* omnium ad omnes (hoc eſt ratio totius pyramidis ABCR ad totam OEFK) triplicata erit rationis IM ad PZ. Quod erat demonſtrandum.

c Per 12. l. 5.

PROPOSITIO IX.

Fig. 18. & 19.

Æ Quales pyramides reciprocant baſes, & altitudines: & quæ reciprocant, ſunt æquales.

1. Pars. Sint primò pyramides trigonæ BACO, HKLN: perfectis parallelogrammis BE, HR, ſuper his ſint parallelepipeda BF, HP. Erunt (ut oſtendimus in 8.) pyramidum ex hyp. æqualium ſextupla, ac proinde æqualia inter ſe. Sunt verò horum parallelepipedorum altitudines HK,

H K, B A eædem, quæ pyramidum: baſes verò B E, H R duplæ *o* ſunt baſium pyramidalium B C O, H N L, ac proinde iis proportionales. Cùm igitur ob parallelepipedorum æqualitatem ſit ut BE ad HR, ita *a* reciprocè H K ad B A, etiam erit ut baſis B C O ad baſim H N L, ita reciprocè altitudo H K ad altitudinem BA. Quod erat demonſtrandum.

o Per 34. l. 1.

a Per 34. l. 11.

Quòd ſi pyramides habeant baſes polygonas, retentis iiſdem altitudinibus reducantur ad trigonas, eruntque hæ illis æquales per 6. Sed pyramides ſic reductæ per jam demonſtrata reciprocant baſes & altitudines. Ergo etiam pyramides datæ polygonæ reciprocant baſes & altitudines. Quod erat demonſtrandum.

2. Pars. Quoniam jam ponitur eſſe BCO ad HNL, ut H K ad BA, erit quoque B E ad H R, ut H K ad B A. Ergo parallelepipeda BF, HP *b* ſunt æqualia, ergo & ſextæ eorum partes, nempe pyramides BAC O, HKNL. Quod erat demonſtrandum.

b Per 34. l. 11.

Corollaria.

QUæ de pyramidibus demonſtrata ſunt p. 6. 8. 9. etiam conveniunt quibuſcunque priſmatis, cùm hæc tripla *c* ſint py-

c Per 7. l. 12.

pyramidum eandem baſim & altitudinem habentium. Igitur,

1. Priſmatum æquè altorum eadem eſt proportio, quæ baſium. Id enim oſtenſum eſt de pyramidibus p. 6.

2. Similium priſmatum proportio eſt triplicata proportionis homologorum laterum. Id enim oſtenſum eſt de pyram. p. 8.

3. Æqualia priſmata reciprocant baſes & altitudines, & quæ reciprocant ſunt æqualia. Id enim de pyramidibus oſtenditur p. 9.

Mirum eſt hæc ab Euclide prætermiſſa, cùm præcipua ſint, quæ de ſolidis rectilineis tradi poſſunt.

Scholium.

Ex hactenus demonſtratis elicietur dimenſio quorumcunque priſmatum ac pyramidum.

Priſmatis ſoliditas producitur ex altitudine in baſim ductâ, pyramidis verò ex tertiâ altitudinis parte ductâ in baſim.

Ut, ſi priſmatis altitudo ſit 5. pedum, baſis verò 25. pedum quadratorum, multiplica 25. per 5. proveniunt 125. pedes cubici pro ſoliditate priſmatis.

Fig. 13. & 14. *Eſto enim priſma polygonum AH. Ejus baſi AE intelligatur æquale eſſe triangulum BAC, ſuperque eo priſma BE æquè altum ac AH. Erunt* c *BE, AH æqualia priſmata. Sed BE priſma* d *producitur ex altitudine ſuâ in baſim BAC, hoc eſt* e *AE. Ergo etiam priſma AH fit ex altitudine ſuâ, quæ altitudini priſmatis BE æqualis ponitur, in baſim AE.*

c Per corol. 1. præced.
d Per ſchol. p. 40. l. 11.
e Per conſtr.

Hinc

Hinc verò & ex 7. patet demonſtratio partis ſecundæ.

Lemma ad P. 10.

PYramides & priſmata, quæ conis & cylindris in infinitum inſcribuntur, in conos & cylindros deſinunt.

Demonſtratur ut lemma propoſitionis adminiculo propoſitionis 6. & corollarii poſt. p. 9. ſi, ut iſtic plana circulo inſcripta, ita hîc pyramides & priſmata, quæ ſuper planis illis tanquam baſibus conſiſtunt, à cono & cylindro auferantur.

PROPOSITIO X.

OMnis conus tertia pars eſt cylindri eandem baſim & altitudinem habentis.

Baſi CL intelligatur inſcribi polygonum regulare quotcunque laterum, & ſuper illo tanquam baſi, cono quidem pyramis, cylindro autem priſma inſcribi. Erit pyramis *a* tertia pars priſmatis. Et ſi rurſum inſcribatur circulo polygonum laterum duplo plurium, ſuperque eo inſcribatur cono pyramis & cylindro priſma, iterum erit pyramis tertia pars priſmatis. Atque hoc ſemper eveniet. Quare cùm pyramides in conum, *b* priſmata in cylindrum

Fig. 20.

a *Per 7. l. 12.*

b *Per lem. præc.*

e Per Poriſ. univ. poſt. 2 l. 12. drum deſinant, etiam e conus tertia par[s] cylindri erit. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XI.

Fig. 20. & 21. *Conorum æquè altorum (BAF, QXR) proportio eadem eſt, quæ baſium (CL, SE). Idem accidit cylindris æquè altis.*

Pyramides conis æquè altis inſcript[æ] ſunt, d ut baſes. Atqui e pyramides ta[n]dem in conos deſinunt. Ergo etiam f co[ni] ſunt ut baſes. Cùm verò cylindri cono[rum] rum eandem cum ipſis baſim & altitudi[-] nem habentium ſint tripli, etiam ipſi e[-] runt, ut baſes. Quod erat demonſtran[-] dum.

d Per 6. l. 12.
e Per lem. ante 10. l. 12
f Per poriſ. univ.

Corollarium.

Eodem modo demonſtrabitur, etiam prisſmata & cylindros æquè alta eſſe inter ſe ut baſes, imò quælibet corpora cylindriſormia æquè alta, hoc eſt, quæ producuntur ex quibuſcunque planis in ea[n]dem altitudinem ductis, eſſe inter ſe u[t] baſes. Eodem modo de pyramidibus [&] cono æquè altis, & conicis quibuſcu[n]que ratiocinare.

PRO-

PROPOSITIO XII.

onorum ſimilium (B A F & Q Z R) pro- Fig. 20. & 21.
portio eſt triplicata proportionis diametro-
s (B F & Q R) quæ ſunt in baſibus. Idem
ndris ſimilibus accidit.

Similium conorum baſibus inſcribe po-
pna ordinata, quæ proinde ſimilia e-
it. Pyramides ſuper his polygonis in-
iptæ conis etiam ſimiles ſunt; quod fa-
è oſtenditur. Ergo earum proportio eſt
plicata *a* proportionis laterum BL, QE; a Per 8. *l.* 12.
c eſt *b* proportionis diametrorum BF, b *Eſt demonſtr. in* 1. *l.* 12.
R. Quare cùm pyramides *c* in conos
ſinant, etiam conorum proportio *d* eſt
plicata proportionis diametrorum BF, b *Per lem. ante* 10. *l.* 12.
R. Quod erat demonſtrandum.
De cylindris patet theorema, cùm ſint d *Per poriſ. univ.*
pli conorum.

PROPOSITIO XIII.

I cylindrus (BI) ſecetur plano (RL) baſibus Fig. 22.
(BQ, CI) parallelo, erit pars (BL) ad
tem (RI) ut axis ſegmentum (AO) ad
mentum axis (OF.)

Demonſtratur ut prima ſexti.

Theorema eodem modo verum eſt d
ſuperficie.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 23. & 24. *CYlindri (AR & CI) baſibus (MQ, GH) æqualibus, ſunt inter ſe ut altitudines (LZ, SF.) Idem conis accidit.*

Abſcinde ab altiori cylindro AR cylin-
drum AG, altitudinis LE ejuſdem cum
a Per 11. l. 12. SF. Igitur cylindri AO, CI *a* æquales
ſunt. Cùm igitur cylindrus AO ſit ad cy-
b Per præc. lindrum AR, ut *b* LE ad LZ, etiam C
erit ad AR, ut LE ad LZ, hoc eſt (qu
c Per conſtr. LE & SF *c* æquantur) ut SF ad LZ
Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

THeorema etiam verum eſt de pr
ſmatis, itemque de pyramidibus,
demonſtratio planè ſimilis. Sed de pri
matis ex corol. 1. p. 9. 12. & 25. l. 11. eju
que coroll. De pyramidibus ex hoc, &
7. l. 12.

PROPOSITIO XV.

Fig. 2. & 4. 25. *ÆQuales cylindri (AR, DF) recipro
baſes & altitudines, & ſi reciprocant, æ
quales ſunt. Idem conis accidit.*

D

Demonſtratur ut P. 34. l. 11. ſed pro 32. 25. iſthic citatis hîc adhibebitur prop. 1. & 13. lib. 12.

Scholium.

Cum nihil attulerit Euclides de ratione compoſitâ in corporibus, eam breviter hoc loco demonſtrabimus.

1. *Cylindrus ad cylindrum, & priſma ad priſma, rationem habent compoſitam ex rationibus baſium & altitudinum.*

Sunto cylindri F D, & A R. Ab altiori A R (*nam in æquè altis res per ſe patet*) *abſcinde A O æquè altum ac F D. Sit etiam ut baſis U T ad baſim M Q, ita F N ad X, & ut altitudo N D, ſeu A O, ad altitudinem B R, ita X ad Z. Oportet igitur oſtendere cylindrum F D eſſe ad cylindrum A R, ut F N eſt ad Z. Cylindrus F D eſt ad cylindrum A O, ut* a *baſis U T ad baſim M Q, hoc eſt* b *ut F N eſt ad X, cylindrus autem A O eſt ad cylindrum A R, ut* c *B O ad B R; hoc eſt ut* d *X ad Z. Igitur ex* e *æquo cylindrus F D eſt ad cylindrum A R, ut F N ad Z.* Fig. 25. & 24. a Per 11. l. 2. b Per conſtr. c Per 13. l. 12. d Per conſtr. e Per 22. l. 5.

De priſmatis res eodem modo demonſtrabitur, ſed ex corollario 1. p. 9. & coroll. p. 14.

2. *Etiam conus ad conum & pyramis ad pyramidem rationem habent compoſitam ex rationibus baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem.*

Sunt enim e *cylindrorum ac priſmatum partes tertiæ.* e Per 10. & 7. l. 12.

PROPOSITIO XVI. XVII.

HÆ propoſitiones omnium prolixiſſimæ nu
alium uſum habent, quàm ut demonſtre
P. 18. quam nos aliâ faciliori viâ demonſtra
mus.

Lemma ad P. 18.

Fig. 26. *CYlindri hemiſphærio inſcripti in hemiſphæ*
rum deſinunt.

Sit PZY maximus hemiſphærii ſemi
circulus, ſitque radius AZ perpendicula-
ris diametro PY. Seca AZ in aliquot æ-
quales partes AM, MN, NZ, ductiſ-
que per diviſionum puncta M, N perpen-
dicularibus, &c. inſcribantur ſemicircu-
lo rectangula OBRK, EDHS, quibus
deinde extra circulum continuatis, ſemi-
circulo circumſcripta intelligantur re-
ctangula FTYP, LUBO, QXDE. E-
runtque omnia æquè alta, exceſſus autem
circumſcriptorum ſupra inſcripta ſunt
plana FK, LS, XE, UH, TR, quæ ſi-
mul ſumta conficiunt rectangulum F
YP; nam quia XE æquatur DS, erun
LS, UH, XE ſimul æqualia rectangu
LB, hoc eſt OR. Quare ſi adjicias utrin
que plana EK, TR, erunt ſimul omn
FK

FK, LS, XE, UH, TR æqualia rectangulo FTYP. Si jam intelligatur ſemicirculus cum rectangulis circa radium immotum AZ circumagi, inſcripta rectangula EH, OR producent cylindros hemiſphærio inſcriptos, & rectangula circumſcripta producent cylindros hemiſphærio circumſcriptos, ſibi mutuò inſiſtentes; & ſicut rectangulorum circumſcriptorum exceſſus ſupra inſcripta rectangula erat rectangulorum FY, ita etiam cylindorum circumſcriptorum exceſſus ſupra inſcriptos erit cylindrus à rectangulo FY genitus. Atqui hujus cylindri altitudo fiet quâvis datâ minor, adeóque etiam ipſe quovis dato *b* evadet minor, ſi radio in plures ſine fine partes diviſo rectangulorum, indeque & cylindrorum, numerus ſine fine multiplicetur. Ergo cylindrorum circumſcriptorum, multóque magis ipſius hemiſphærii, quod cylindrorum circumſcriptorum pars eſt, exceſſus ſupra inſcriptos cylindros fiet tandem quovis dato minor. Ergo cylindri hemiſphærio in infinitum inſcripti tandem deſinunt *c* in hemiſphærium. Quod erat demonſtrandum.

b *Patet ex* 13. *l.* 12.

c *Per defin.* 6. *l.* 12.

Corollarium.

EOdem modo demonſtrabitur, cylindros cono, conoïdi, ſphæroïdi, &c inſcriptos, in ipſa deſinere.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 27. *Sphærarum proportio eſt triplicata proportionis diametrorum* (*B K*, *R Z*.)

Radiis A B, Y R in quot placuerit æquales partes, ſed æquè multas, diviſis, ductiſque per diviſionum puncta perpendicularibus &c, intelligantur maximis ſphærarum ſemicirculis inſcripta eſſe rectangula æquè multa, quæ circa radios immotos A B, Y R circumacta inſcribant utrique hemiſphærio cylindros æquè multos, ſibi invicem inſiſtentes. Quia K C *o* eſt ad C F, ut C F ad C B. Erit ratio K C ad C B duplicata *a* rationis K C ad C F, hoc eſt rationis F G ad C B, Similiter erit ratio Z E ad E R duplicata rationis X E ad E R. Sed per conſtr. eſt K C ad C B, ut Z E ad E R. Ergo etiam *b* F C eſt ad B C, ut X E ad E R. Sed B C eſt ad C O per conſtr. ut R E ad E S. Igitur ex æquo *c* F C eſt ad C O, ut X E ad E S.

o Per corol. p. 13. l. 6.
a Per deſin 10. l. 5.
b Per 35. l. 5.
c Per 22. l. 5.

Cy-

Cylindri igitur *d* F L, X Q ſimiles ſunt, ac proinde eorum proportio eſt triplicata *e* proportionis diametrorum F I, X V, ſeu ſemidiametrorum F C, X E, quæ ſunt in baſibus. Sed proportio F C ad X E eadem eſt cum proportione, quæ eſt inter diametros ſphærarum B K, R Z (nam ut jam oſtendi F C eſt ad X E, ut C O ad E S; hoc eſt ut B K ad R Z, ipſarum C O, E S per conſtr. æquè multiplices.) Ergo ratio cylindrorum F L, X Q eſt triplicata rationis diametrorum B K, R Z. Eodem modo demonſtrabimus, ſingulos cylindros hemiſphærio uni inſcriptos ad cylindros ſingulos inſcriptos alteri hemiſphærio rationem habere triplicatam rationis diametrorum B K, R Z. Ergo etiam ratio ſimul omnium ad omnes ſimul *i* triplicata eſt rationis diametrorum B K, R Z. Quare cùm aggregata cylindrorum tandem in hemiſphæria *k* deſinant, hemiſphæriorum quoque, ac proinde & ſphærarum ratio triplicata erit *n* rationis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

d *Per defin.* 4. *l.* 12.
e *Per* 12. *l.* 12.
i *Per* 12. *l.* 9.
k *Per lem. præced.*
n *Per po. riſ. univerſ.*

Corollarium.

NOtâ igitur proportione diametrorum, etiam ſphærarum proportio innoteſ-

cit, ut ſi minoris diameter ſit unius pedis, majoris 10. continuetur ratio 1 ad 10 pe quatuor terminos, 1. 10. 100. 1000. ut 1 ad 1000. quartum terminum, ita ſphær minor ad majorem.

Conorum, Cylindrorum, ſphæræ di menſio dabitur libro ſeq. ex Archimede.

Scholium.

QUemadmodum ſimiles planæ figuræ per me- diam proportionalem unam, ita corpora ſimi- lia non niſi per medias duas, in proportione dat augentur vel diminuuntur.

Data ſit ſphæra, vel cubus, vel aliud corpu quodcunque, cujus radius ſive latus ſit A. Data i tem ſit proportio quæcunque A ad B, ut dupla. Opor teat exhibere corpus, & duplum dati, & ſimile.

Inter terminos rationis datæ A & B invenian- tur duæ mediæ proportionales X, Z, ut docuimus in ſcholio poſt 13. l. 6. Sphæra, cujus radius eſt X, ſive corpus dato ſimile, factum ſuper latere X, erit duplum dati.

Nam corpora ſimilia, quorum radii, ſeu latera ſunt A & X, rationem inter ſe habent triplicatam i *rationis A ad X, hoc eſt, eandem,* b *quam A habet ad B.*

i *Corol.* 2. *p.* 9. *& per* 12. *ac* 18. *l.* 12.

Atque hoc eſt celebratiſſimum illud problema, quod Deliacum à Deliaco Apolline dictum eſt, quòd is, lue ſæviſſimâ Athenas populante, conſultus reſpondiſſet, peſtem ceſſaturam, ſi ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Ita Valerius Maximus l. 8.

b Per *defin.* 10. *l.* 5.

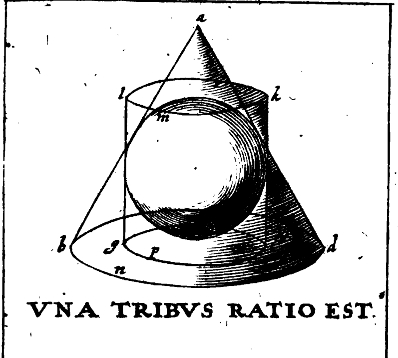
A N-

ANDREÆ TACQUET,

E SOCIETATE JESU,

SELECTA EX ARCHIMEDE THEOREMATA.

Viâ faciliori ac breviori demonſtrata, & novis inventis aucta.



AMSTELÆDAMI,
Apud FRANCISCUM VAN-DER PLAATS.
MDCC.

LECTORI.

Quamvis in Mathematicis diſciplinis complures ſummi & admirabiles Viri extiterint, prima tamen gloria communi quodam conſenſu Archimedi Syracuſano delata eſt. Sed illum plures laudant, quàm legant; admirantur plures, quàm intelligant. Cauſæ, opinor, ſunt exemplarium moles, & raritas, ſermonis ex Græco tranſlati obſcuritas nonnulla, demonſtrationes prolixæ & arduæ. Putavi igitur ex ſtudioſæ juventutis uſu futurum, ſi elementis jam illuſtratis hæc à me ſelecta ex Archimede theoremata, & viâ multò faciliori ac breviori demonſtrata ſubnecterem. Selegi porrò ea, quæ & admirationis plus, & utilitatis habent, viamque in demonſtrando eam tenui, ut ſperem, eum, qui elementa perceperit, hæc ſummi Geometræ præclariſſima inventa negotio haud magno aſſecuturum. Sub finem adjectis tredecim propoſitionibus, Archimedis de cylindro & ſphærâ doctrinam ampliorem facio, atque inter cætera demonſtro, ſeſquialteram proportionem in tribus corporibus, ſphærâ, cylindro, & æquilatero cono, utroque ſphæræ circumſcripto, continuari. Varia inſuper ſparſim, inter quæ propoſitio 12. & corollaria prop. 14. præcipua ſunt, & ſcholia omnia adjeci. Fruere iſtis, quiſquis Geometriæ candidatus es, & quantum ex Euclide profeceris, in Ar-

chi-

chimede, experire. Cùmque in veritatum pulcherrimarum contemplatione defigi te, evehique ſurſum perſenſeris, mentem ab infimis hiſce rebus feliciter jam avulſam attolle etiam altiùs, atque dirige ad veritatem primam, æternam, immenſam, quæ Deus eſt; cujus ineffabili viſione nos futuros aliquando æternum beatos confido. Vale.

DEFINITIONES,

Seu

Vocum nonnullarum explicatio.

ESto circulus B E C G, cujus centrum A, diameter B C, quam ad rectos angulos ſecet recta E G non per centrum, videlicet in D. Ex centro autem educantur radii H E, A G. His poſitis, *Fig. 23. tab. 6. ex Archim.*

1. Sector ſphæræ eſt, qui à ſectore circulari A E C G ſeu A E B G, circa diametrum B C in orbem acto, producitur.

2. Segmentum ſeu portio ſphæræ eſt, quæ à circulari ſegmento E C G, ſeu E B G circa eandem diametrum B C in orbem acto, deſcribitur.

3. Portionis ſphæricæ (E B G) vertex eſt diametri immobilis extremitas B. Baſis eſt circulus à rectâ E G deſcriptus. Axis eſt diametri pars B D inter verticem B, & D centrum baſeos intercepta.

4. Cùm ſphæricæ portionis aut corporis ei inſcripti, aut coni ſuperficiem nomino, ſemper intelligo abſque baſi; & dum cylindri ſuperficiem dico, intelligo ſi-

ſimiliter abſque baſibus, niſi adjungatur (*tota*) tunc enim accipiuntur & baſes.

Rurſum cùm de cylindris vel conis ago, non alios intelligo quàm rectos.

Axiomata.

Fig. 1. & 16. 1. POlygoni circulo inſcripti ambitus minor eſt circuli peripheriâ.

Fig. 1. 2. Polygoni circulo circumſcripti ambitus circuli peripheriâ major eſt.

Fig. 16. 3. Quòd ſi polygonum circulo inſcriptum circa diametrum (AE) unà cum circulo circumagatur, erit corporis à polygono geniti ſuperficies minor ſphæræ ſuperficie. Et ſi polygonum circulo circumſcriptum circa diametrum unà cum circulo circumagatur, erit corporis à polygono geniti ſuperficies major ſuperficie ſphæræ.

Fig. 17. 4. Similiter ambitus polygoni inſcripti ſegmento circulari (DAF) minor eſt peripheriâ ſegmenti (DAF.) Et ſi polygonum ſegmento inſcriptum unà cum ſegmento circa ſegmenti axem (AO) circumagatur, erit corporis à polygono geniti ſuperficies minor ſuperficie portionis ſphæricæ (DAF.)

Fig. 3. & 6. 5. Superficies priſmatis cylindro inſcripti

pti minor eſt cylindri ſuperficie, circumſcripti verò major.

6. Et ſuperficies pyramidis cono inſcriptæ minor eſt coni ſuperficie, circumſcriptæ autem major. Fig. 4. & 8.

PROPOSITIO PRIMA.

Datæ ſint figuræ quæcunque, ſeu planæ, ſeu ſolidæ, A, B. Sint autem magnitudines aliæ ſemper atque aliæ; quæ figuras datas A ac B ſemper minus ac minus excedendo in ipſas a deſinant, & tamen ſemper inter ſe æquales ſint. a Defin. 6. l. 11.

Dico etiam figuras A, & B æquales eſſe.

E.	F.	
A.	A.	X.

Si non, alterutra major erit: ſit ergo A major, quàm B exceſſu X. Per hypotheſim dantur magnitudines E, F inter ſe æquales, quæ excedant figuras A, B exceſſu minori, quàm X, quo A ponitur ſuperare B. Ergo F minor eſt quàm A. Sed F per hypotheſim eſt æqualis E. Ergo etiam E minor eſt quàm A, quod eſt abſurdum; cùm per hyp. E excedat A. Eodem modo oſtendam, B non poſſe eſſe majorem quàm A. Ergo cùm neutra ſit major alterâ, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Datæ ſint figuræ A & B; ſint autem magnitudines aliæ ſemper atque aliæ, quæ figuris datis ſemper minùs ac minùs deficiendo in ipſas b *deſinant, & ſemper inter ſe æquales ſint.*

b Defin. 6. l. 12.

Dico etiam figuras datas A, B æquales ſint.

A. B. Z.
O. P.

Si non, alterutra mino[r] erit. Eſto igitur A mino[r] quàm B defectu Z. Pe[r] hypotheſim dari poſſunt magnitudine[s] O, P inter ſe æquales, quæ deficiant [à] figuris datis A & B defectu minori quàm Z, quo ponitur A deficere à B. Ergo P major eſt quàm A. Sed P per hypotheſin eſt æqualis O. Ergo etiam O major eſt quàm A, quod repugnat hypotheſi, quâ ſtatuitur O minor quàm A. Eodem mod[o] oſtendam, B non eſſe minorem quàm A. Quare cùm neutra ſit minor alterâ, æquales erunt. Quod erat demonſtrandu[m].

PROPOSITIO III.

Ambitus polygonorum circulo circumſcriptorum, & inſcriptorum, definunt [in] cir-

..lis peripheriam. Similiter & polygona ipſa ..irculum deſinunt.

..i nimirum arcubus ſine fine biſectis ..a ſemper ac plura latera circulo cir..ſcribantur & inſcribantur. Fig. 1. tab. 6. ex Archim.

.. Pars. Intelligantur circulo inſcripta ..ircumſcripta polygona ordinata; ſive ..raditur p. 12. l. 4. ſive ut in hac figu.. perinde erit. Manifeſtum eſt *a* F I eſ.. ..E C (hoc eſt *b* totum ambitum cir..nſcriptum ad totum ambitum inſcri..m) ut I A eſt ad C A. Atqui I C ex..ſus rectæ I A ſupra C A ſit tandem quâ..mque datâ minor, ſi plura ſemper ac ..ura in infinitum latera circumſcribi & ..ſcribi intelligamus. Ergo etiam exceſ..s ambitûs circumſcripti ſupra ambitum ..ſcriptum tandem fiet quovis dato mi..r. Ergo multò *c* magis exceſſus ambi..s circumſcripti ſupra peripheriam fiet ..ocunque dato minor. Similiter, quia ..m oſtendi, defectum ambitûs inſcripti .. ambitu circumſcripto fieri quovis dato ..inorem, multò *o* magis defectus inſcri..i ambitûs à peripheriâ fiet quovis dato ..inor. Ambitus igitur tam inſcripti quàm ..nſcripti in peripheriam *d* deſinunt. ..uod erat primum. Hæc ulteriùs de-

a Per coroll. 1. p. 4. l. 6.

b Per 12. l. 15.

c Patet ex ax. 1.

o Patet ex ax. 1.

d Defin. 6. l. 12.

monſtrare operæ pretium non eſt, c
ſatis ſint manifeſta.

2. Pars. Quia jam oſtenſum eſt, exc
ſum lateris F I ſupra latus E C fieri ta
dem quovis dato minorem (eſt enim
ad E C, ut I A ad C A) etiam exce
quadrati F I ſupra quadratum E C
quovis dato minor. Sed ut quadratum
e Per 22. l. 6. ad quadratum E C, ita *e* polygonum c
cumſcriptum ad polygonum inſcript
Ergo etiam exceſſus polygoni circumſc
pti ſupra inſcriptum tandem fiet dato m
nor. Ergo multò magis exceſſus poly
ni circumſcripti ſupra circulum tand
fiet dato minor; ac proinde & polygo
inſcripti defectus à circulo dato minor
quando erit. Igitur polygona circulo ta
inſcripta quàm circumſcripta in circulum
i Defin. 6. l. 12. *i* deſinunt. Quod erat alterum.

PROPOSITIO IV.

Fig. 1. *o Defin.* 3. *l.* 4. *POlygonum o ordinatum circulo conſcript (FINTR) æquatur triangulo, cujus ſis eſt ambitus polygoni, altitudo verò circ radius.*

Et polygonum ordinatum circulo inſcript æquatur triangulo, cujus baſis eſt polygoni

ſcripti ambitus, altitudo verò perpendicularis AO) in latus unum ex centro ducta.

1. Pars. Radius AB ad contactum ductus *a* eſt perpendicularis ad tangentem F. Quare, ſi ductis rectis AF, AI, AN &c. polygonum reſolvatur in triangula, erit radius AB communis omnium altitudo; adeóque triangula ipſa liquet eſſe æqualia. Ergo triangulum baſim habens parem ſummæ laterum FI, IN, NT &c. altitudinem verò AB, æquabitur illis *b* omnibus, hoc eſt toti polygono circumſcripto. a *Per* 18. *l.* 3. b *Patet ex* 1. *l.* 6.

2. Pars. Simili fere ratiocinio concluditur.

PROPOSITIO V.

Circulus eſt æqualis triangulo, cujus baſis eſt peripheria circuli, altitudo autem ſemidiameter. Fig. 2.

Polygona ordinata circulo circumſcripta, & triangula baſes habentia ambitum polygoni, altitudinem verò radium circuli, ſemper ſunt *a* æqualia. Atqui polygona circulo in infinitum circumſcripta in circulum *b* deſinunt; ſimiliterque triangula (ut mox oſtendam) quæ pro baſi ha- a *Per præc.* b *Per* 3. *hujus.*

bent ambitum polygoni circumſcri[pti], pro altitudine verò radium A B, tand[em] deſinunt in triangulum pro baſi hab[ens] peripheriam, pro altitudine radium A[B].
c Per 1. hujus. Ergo *c* circulus, & triangulum pro b[aſi] habens peripheriam, pro altitudine [ra]dium A B, æqualia ſunt.

Quòd autem triangula ſub ambitu p[o]lygoni & radio deſinant in triang[ulum] ſub peripheriâ & radio, ſic o[ſtendo]. Triangula ſub ambitu circumſcripti pol[y]goni & radio A B ſunt ad triangulum ſ[ub]
i Per 1. l. 5. peripheriâ & radio A B, ut *i* baſis ad ba[ſim], baſis ad baſim, nempe ut ambitus polygon[i] ad peripheriam, cùm altitudinem habeant communem. Sed ambitus polygoni in
k Per 3. hujus. peripheriam *k* deſinit. Ergo & triangul[a] deſinet in triangulum.

Corollaria.

1. EX hac & 41. l. 1. patet, rectangulum ſub radio & dimidiâ circumferenti[â] eſſe æquale circulo: ſub radio & totâ cir[]cumferentiâ eſſe duplum: ſub radio & totâ diametro & totâ circumferentiâ eſſe quadruplum circuli.

Fig. 5. lib. 4 tabulâ 3. 2. Circulus eſt ad quadratum ſibi in[]ſcriptum, ut circumferentia dimidi[a]

CDE

CDE ad diametrum; ad quadratum verò circumſcriptum, ut quarta circumferentiæ pars ad diametrum

Nam rectangulum ſub CDE & radio CA ſeu CF (hoc *d* eſt ipſe circulus) eſt ad rectangulum, GFCE, nimirum ſub FG & CE (hoc eſt ad quadratum inſcriptum BCDE) ut *e* CDE dimidia circumferentia eſt ad FG ſeu CE diametrum; quod erat primum, ac proinde circulus eſt ad duplum rectanguli GFCE (hoc eſt ad FH quadratum circumſcriptum) ut CDE ad duplam diametrum CE, ſive ut quadrans CD ad diametrum CE.

d Per corol. præced.

e Per. l. 6.

PROPOSITIO VI.

Circuli circumferentia diametrum continet minùs quàm ter & unam ſeptimam (ſeu $\frac{10}{71}$) plus vero quàm ter & $\frac{10}{71}$.

Ad hujus theorematis demonſtrationem aſſumit Archimedes polygona ordinata, alterum circulo circumſcriptum, inſcriptum alterum, utrumque 96 laterum. Deinde oſtendit 96 latera circulo circumſcripta continere diametrum minùs quàm ter & $\frac{1}{7}$: ac proinde circumferentiam, quæ ipſis minor eſt, etiam continere diametrum minùs quàm ter & $\frac{1}{7}$. La-

te-

tera verò 96 circumferentiæ inſcripta (ac proinde & circumferentiam, quæ ipſis major eſt) ampliùs continere diametrum quàm ter $\frac{10}{71}$. Porrò longior eſt hujus rei demonſtratio, quàm ut hoc loco adferri debeat. Quòd ſi ad polygona plurium adhuc laterum Geometricum ratiocinium velimus extendere, limites jam ſtatutos arctare poterimus magis magiſque ſine termino, atque ita propiùs in infinitum ad veram proportionem accedere. Præſtitum eſt hoc à Ludolpho Ceulen, Grimbergero, Metio, Snellio, aliiſque. Proportiones præcipuas hactenus inventas hîc ſubjicio.

Prima eſt Archimedis hujuſmodi.
Diameter 7
Circumferentia 22. major verâ.
Diameter 71
Circumferentia 223 minor verâ

Rationes 22 ad 7, & 223 ad 71. Si ad commune conſequens reducantur (quod fit eodem modo, quo fractiones revocantur ad eundem denominatorem) rationes orientur 1562 ad 497 & 1561 ad 497.

Poſitâ igitur diametro partium 497, erit circumferentia major verâ 1562, & circumferentia minor verâ 1561.

U-

Utraque igitur à verà differt quantitate minori, quàm ſit $\frac{1}{497}$ pars diametri. Quòd ſi rationes 7 ad 22, & 71 ad 223 reducantur ad commune conſequens, provenient rationes 1561 ad 4906, & 1562 ad 4906.

Poſitâ igitur circumferentiâ partium 4906 erit diameter minor verâ 1561, diameter major verâ 1562.

Utraque igitur à verâ diametro differt quantitate minori, quàm ſit pars $\frac{1}{4906}$ circumferentiæ.

Proportio tradita à Metio eſt Archimedæâ multò accuratior. Juxta hanc eſt

Diameter 113
Circumferentia 355.

Inter omnes parvis numeris conſtantes nulla veræ propinquior: ex hac enim poſitâ diametro 10, 000, 000, provenit circumferentia 31, 415, 929, quæ à verâ ſolùm penes notam primam 9 differt exceſſu paulò majore, quàm ſint duæ particulæ decimillioneſimæ diametri.

Sed utrâque multò exactior eſt gemina illa Ludolphi à Ceulen: prioris termini conſtant notis 21, poſterioris verò notis 36.

Diameter
100000000000000000000

Circumferentia minor verâ
314159265358979323847.
Circumferentia minor verâ
314159265358979323846.

Differentia utriuſque circumferentiæ eſt particula una diametri denominata à numero, qui conſtat unitate &. 20 cifris, ac proinde tam hæc quàm illa à verâ circumferentiâ differt minori quantitate quàm ſit diametri particula dicta, videlicet centies millioneſies millioneſies millioneſima.

Diameter
1000000000000000000000000000
0000000000

Circumferentia major verâ
314159265358979323846264338
327950289.
Circumferentia minor verâ.
3141592653589793238462643 38
327950288.

Differentia utriuſque circumferentiæ, inter quam vera exiſtit, eſt diametri particula una, denominata à numero, qui conſtat unitate & 35 cifris, quæ particula ad diametrum minorem habet proportionem, quàm arenula una ad orbem terræ. Non enim conſtat orbis terræ tot arenu-

lis,

lis, quot continentur particulæ tales in diametro.

Fruſtra igitur ſit ulteriùs progredi. Progrediere nihilominus ultrà in infinitum, ſi raticiocinium Geometricum, cujus methodum expeditam tradit Snellius, placuerit continuare.

Scholium.

Proportionis jam traditæ fructus eximii ſunt hi, qui ſequuntur.

Inventio Diametri ex circumferentiâ.

Majorem terminum unius è proportionibus jam traditis ſtatue primo loco, minorem ſecundo, circumferentiam tertio, his tribus numeris quæratur per regulam auream quartus proportionalis. Is erit quæſita diameter.

Ut ſi detur, circumferentiam maximi circuli terræ milliaria continere Belgica unius horæ 8640, *& quæratur terræ diameter, ſic ſtabunt termini,*

355 ——— 113 ——— 8640 ———

multiplica jam ſecundum per tertium, & productum divide per primum; proveniunt milliaria Belgica 2750 $\frac{14}{71}$ *pro diametro orbis terræ.*

Inventio circumferentiæ ex Diametro.

Terminus minor unius è proportionibus ſuprà traditis ſtatuatur primo loco, major ſecundo, Dia-

Diameter nota tertio. His tribus numeris quæratur quartus proportionalis. Is dabit quæſitam circumferentiam.

Ut ſi detur, orbis terræ diametrum continere milliaria Belgica unius horæ 2750 $\frac{14}{71}$, *& quæratur ambitus, termini ita ſtabunt,*

113 —— 355 —— 270 $\frac{14}{71}$ ——

Tunc ſecundum multiplica per tertium, & productum divide per primum: proveniunt miliaria Belgica 8640 *pro ambitu orbis terræ.*

Quàm modicè hæc circumferentia veram excedat, dictum eſt ſuprà, exceſſu videlicet paulò majori, quàm ſint diametri terreſtris duæ particulæ decimillioneſimæ, hoc eſt 9 *circiter aut* 10 *pedibus Rhynlandicis, quorum* 18000 *conſtituunt milliare horarium. Quòd ſi utamur proportione Ludolphinâ etiam priori, cujus termini conſtant* 21 *notis, invenietur circumferentia inſenſibiliter à verâ differens, non ſolùm diametro datâ milliarium Belgicorum* 2750, *qualis eſt terræ, verùm etiam licèt diameter ponatur centum millionum eorundem milliarium, qualis fortaſſe eſt diameter firmamenti: hac enim poſitâ proveniet circumferentia minori quantitate à verâ differens, quàm una centimillioneſima particula pedis Rhynlandici. Quòd ſi ad inveſtigandam circumferentiam orbis terræ utamur proportione Archimedis, in[illegible]llum circumferentiarum verâ majoris ac minoris excedet* 5 *milliaria Belgica. Non eſt igitur adhibenda Archimedæa proportio, niſi in quantitate parvâ: imò ſemper expediet Metianâ uti, quæ & modicis conſtat terminis, & pluſquam millies exactior eſt.*

Cir-

Circuli dimenſio.

Semidiameter multiplicata per dimidiam circumferentiam producit aream circuli, quemadmodum patet ex coroll. 1. *p.* 5. *hujus.*

Ut ſi ſemidiametrum orbis terræ, quæ neglectâ fractione continet milliaria Belgica 1375, *multiplicemus per dimidium terræ ambitum, per milliaria nempè Belgica* 4320, *provenient milliaria Belgica quadrata* 5,940,000 *pro circulo maximo terræ. Differentia inventæ circularis areæ à verâ habetur, ſi differentia inventæ circumferentiæ dimidiæ à dimidia verâ ducatur in ſemidiametrum datam, aut ſi differentia ſemidiametri inventæ à verâ ducatur in datam ſemicircumferentiam.*

Dimenſio Cylindrorum & Conorum.

Eam hîc appono, quòd à circuli dimenſione pendeat.

Cylindrus igitur & priſma quodvis producitur ex altitudine multiplicatâ per baſim: Conus & pyramis ex tertiâ altitudinis parte in baſim ductâ, ſunt enim partes tertiæ cylindrorum ac priſmatum eandem cum ipſis baſim & altitudinem habentium, per 10 & 7. *l.* 12.

Sit baſis Cylindri aut coni 50 *pedum quadratorum, altitudo pedum* 100. *Duc* 100 *in* 50; *proveniunt* 5000 *pedes cubici pro ſoliditate cylindri. Duc tertiam partem altitudinis* 100, *nimirum* 33 $\frac{1}{3}$ *in* 50, *proveniunt* 1666 $\frac{2}{3}$ *pedes cubici pro ſoliditate coni.*

PRO-

PROPOSITIO VII.

Fig. 6. l. 12. tab. 5.

Circulorum peripheriæ eam inter ſe proportionem habent, quam diametri.

Nam polygonorum ſimilium circulo ſine fine inſcriptibilium ambitus ſunt inter ſe ſemper, ut *a* diametri AF & IC. Sed hi *b* ambitus in peripherias deſinunt. Ergo *c* etiam peripheriæ ſunt inter ſe, ut diametri. Quod erat demonſtrandum.

a *Per corol. p. 1. l. 12.*
b *Per 3. hujus.*

PROPOSITIO VIII.

Superficies priſmatis cylindro tam circumſcripti, quàm inſcripti æquatur rectangulo, cujus altitudo eſt latus cylindri, baſis verò æqualis perimetro baſis priſmaticæ.

Fig. 3.

1. Pars. Priſmatis conſcripti ſuperficies tangit cylindrum ſecundùm lineas EA, NF &c. quæ ſunt cylindri latera; hæc autem (quòd ex hyp. cylindrus ſit rectus) ad planum baſeos recta ſunt, ac proinde etiam *c* recta ad lineas, CG, GM &c. Sunt verò & æqualia inter ſe. Igitur unum cylindri latus communis eſt omnium rectangulorum CO, OM, MH &c. altitudo.

c *Per deſin. 3. l. 11.*

tudo. Conſcripti igitur priſmatis ſuperficies æquatur *f* rectangulo ſub ambitu baſis priſmaticæ & priſmatis ſeu cylindri latere contento. *f Patet ex 1. l. 6.*

Eadem eſt ratio ſecundæ partis, nam latus cylindri communis rurſum eſt altitudo rectangulorum BDIK, KIQP &c. quæ conſtituunt ſuperficiem priſmatis inſcripti.

PROPOSITIO IX.

Pyramidis ordinatæ cono recto circumſcripta ſuperficies æqualis eſt triangulo, cujus baſis eſt baſeos pyramidalis circumferentia (FHLD) altitudo autem latus coni (BG.) *Fig. 4.*

Et pyramidis ordinatæ cono recto inſcriptæ ſuperficies æquatur triangulo, cujus baſis eſt baſeos pyramidalis circumferentia, altitudo verò perpendicularis (BO) à vertice in latus baſeos deducta.

1. Pars. Ducantur ad contactus GKM rectæ BG, BK, BM. Erunt hæ recti coni latera, ac proinde æquales. Et quia axis BA *a* rectus eſt baſis plano FKD, etiam planum *b* GBA plano FKD rectum erit. Atqui HG perpendicularis *c* eſt ad AG communem ſectionem plano- *a Per hyp.* *b Per 18. l. 11.* *c Per 18. l. 3.*

rum

d *Collig. ex def. 4. l. 11.* rum F K D & G B A. Ergo H G etiam *d* recta eſt plano G B A, ac proinde perpen-
e *Per defin. 3. l. 11.* dicularis quoque eſt ad *e* ipſam B G. Ergo BG latus coni eſt altitudo trianguli F BH. Eodem modo latus coni erit altitudo reliquorum H B L, L B D &c. Igitur triangulum circumferentiâ F H L D, & latere coni comprehenſum æquatur ſuperficiei pyramidis circumſcriptæ abſque baſi. Quod erat primum.

2. Partis ſimilis fere demonſtratio eſt.

PROPOSITIO X.

a *Defin. 6. l. 12.* *Superficies priſmatis ordinati cylindro recto circumſcripti deſinit* a *in cylindri ſuperficiem, & pyramidis cono recto circumſcriptæ ſuperficiem deſinit.*

Fig. 3. & 4. 1. Pars. Priſmatum ordinatorum cylindro ſine fine conſcriptorum & inſcriptorum ſuperficies habebunt tandem inter ſe differentiam datâ minorem, uti facilè patebit ex 8. & 3. hujus. Multò igitur magis ſuperficies circumſcripti priſmatis à ſuperficie cylindri inter inſcriptam & circumſcriptam mediâ differet differentiâ
b *Defin. 6. l. 12.* minori quâcunque datâ, hoc eſt, *b* deſinet

net in cylindricam ſuperficiem, minùs ſemper ac minùs excedendo.

2. Pars. Eodem modo oſtenditur ex 9. & 3. hujus.

In figuris tantùm exhibentur cylindri & coni ſemiſſes, ne multitudo linearum confuſionem pareret. Cæterùm cogitandi ſunt cylindrus & conus integri, quos priſmata & pyramides circumſcriptæ ambiunt. Sic enim clariùs apparet, planas ſuperficies circumſcriptas eſſe majores ex 3. axiomate.

Lemma ad ſequent.

Sint A B, C D, E F proportionales, ſitque K B dimidia A B, & E G dupla E F; etiam K B, C D, E G proportionales erunt. Fig. 7.

Recta K B eſt ad A B, ut E F ad E G. Rectangulum ergo K B, E G æquatur per 16. l. 6. rectangulo A B, E F. Sed hoc per 17. l. 6. æquatur quadrato C D. Ergo & rectangulum K B, E G par eſt quadrato C D. Ergo per 17. l. 6. K B, C D, E G ſunt proportionales.

PROPOSITIO XI.

Circulus, cujus radius (G H) eſt medius proportionalis inter recti cylindri latus (B C) Fig. 5. & 6.

& baſeos diametrum (*BD*) *æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ.*

Intelligatur circulis ABN, GPN circumſcripta eſſe ordinata polygona, adeóque ſimilia N M, R S, & ſuper N M polygono erectum eſſe priſma cylindro circumſcriptum. Quoniam B D, G H, B C (ex hyp. ſunt proportionales, etiam *AD* ſeu A N) G H & dupla B C *o* proportionales erunt. Jam triangulum ſub A N & ambitu polygoni M N contentum *a* æquatur polygono conſcripto N M: rectangulum verò ſub B C ſeu E F & eodem ambitu N M (hoc eſt *b* triangulum ſub ambitu N M & duplâ B C) æquale eſt *c* ſuperficiei priſmatis cylindro conſcripti. Atqui triangulum ſub ambitu N M, & A N eſt ad triangulum ſub ambitu N M, & duplâ B C *o* ut A N ad duplam B C. Ergo etiam polygonum N M eſt ad ſuperficiem priſmatis cylindro conſcripti, ut A N ad duplam B C. Sed quia jam oſtendi A N, G H, duplam B C, eſſe proportionales, ratio A N ad duplam B C eſt duplicata *d* rationis A N ad G H. Ergo polygonum N M ad ſuperficiem priſmatis rationem habet duplicatam

o *Per lem.*

a *Per 4. hujus.*

b *Patet ex 41. l. 1.*

c *Per 8. hujus.*

o *Per 1. l. 6*

d *Per defin. 10. l. 5.*

[t]am rationis A N ad G H. Sed etiam po[l]ygonum N M ad ſimile ſibi polygonum [G]R Q S rationem habet duplicatam ra[t]ionis A N ad G H, ut facilè colligitur ex [1]. lib. 12. Ergo polygonum N M ad ſuperficiem priſmatis, & ad polygonum G R Q S eandem habet rationem; quæ proinde æqualia *e* ſunt. Eodem modo oſtendam, priſmaticas ſuperficies cylindro in infinitum circumſcriptibiles ſemper æquales eſſe polygonis, quæ circulo G P H in infinitum circumſcribi poſſunt. Quare cùm & ſuperficies priſmaticæ *f* in cylindri ſuperficiem, & polygona *i* in circulum G P H deſinant, etiam cylindri ſuperficies circulo G P H æqualis *k* erit. Quod erat demonſtrandum.

e *Per* 9. *l.* 5.
f Per 10. *hujus.*
i *Per* 3. *hujus.*
k Per 1. *hujus.*

Ex egregio hoc theoremate exhibetur circulus æqualis ſuperficiei cylindricæ.

Corollaria.

1. *Superficies cylindri recti æqualis eſt rectangulo ſub latere B C, & baſeos peripheriâ contento.* Fig. 5. & 6.

Dupla B C (ut oſtenſum ſuprà) eſt ad [G]H, ut G H ad B A, ſeu A N; hoc eſt,

n Per 7. bujus. *n* peripheria P ad peripheriam B N. Ergo triangulum ſub primâ, nempe duplâ B C, & quartâ, nempe peripheriâ B N p Patet ex 16. l. 6. æquatur *p* triangulo ſub ſecundâ GH & tertiâ, peripheriâ ſcilicet P. Sed triangulum ſub G H & peripheriâ P æquale q Per 5. bujus. *q* eſt circulo G P H, hoc eſt, *r* ſuperficiei r Per 11. bujus. cylindricæ. Ergo etiam triangulum ſub duplâ B C & peripheriâ B N (hoc eſt, *s* re s Patet ex 41. l. 12. ctangulum ſub B C & peripheriâ B N) cylindricæ ſuperficiei æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

Ex hoc corollario manifeſtum eſt, rectangulorum proprietates ſuperficiebus cylindricis rectis eſſe communes. *Eſto* igitur corollarium.

Fig. 20. & 21. l. 12. tab. 5. 2. Cylindricæ ſuperficies (B M, Q N) æquè altæ ſunt inter ſe, ut baſium diametri (B F, Q R.)

Nam rectangula ſub peripheriis C L, S E, & rectis æqualibus F M, R N comprehenſa, quibus cylindricæ ſuperficies d Per corol. 1. *d* ſunt æquales, ſunt inter ſe *e* ut baſes pe e Per 1. l. 6. ripheriæ, videlicet C L, S E; hoc eſt *f* ut f Per 7. bujus. diametri B F, Q R.

Fig. 23. & 24. l. 12. tab. 6. 3. Cylindricæ ſuperficies (C I, A R) quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe, ut altitudines (T I, B R.)

Re

Rectangula enim ſub æqualibus per hyp. peripheriis GH, MQ, & lateribus TI, BR contenta, quibus ſuperficies *h* cylindricæ ſunt æquales, ſunt inter *i* ſe, ut TI, BR. h *Per corol.* 1. i Per 1. *l.* 6.

4. Similes cylindricæ ſuperficies (BM, RI) rationem habent duplicatam ejus, quam habent baſium diametri (BF, QR.) *Fig.* 20. & 21. *l.* 12. *tab.* 5.

Cùm cylindri ponantur ſimiles, erit MF ad IQ, *o* ut BF ad QR, hoc eſt *k* ut peripheria CL ad peripheriam SE. Quare etiam rectangula ſub peripheriis CL, SE, & lateribus MF, IQ contenta, ſimilia erunt, ac proinde rationem inter ſe habebunt *l* duplicatam ejus, quam habet MF ad IQ, hoc eſt BF ad QR. Ergo & cylindricæ ſuperficies &c. o *Defin* 4. *l.* 12. k *Per* 7. *hujus.* l *Per* 20. *l.* 6.

5. Cylindricæ ſuperficies (BM, RI) rationem inter ſe habent compoſitam ex rationibus laterum (FM, IQ) & diametrorum (LF, QR) quæ ſunt in baſibus. *Fig. eâdem.*

6. Si æquales ſunt cylindricæ ſuperficies (AR, FD) erit, ut diameter AB ad diametrum FN, ita reciprocè altitudo FH ad altitudinem RB: & è converſo. *Fig.* 24 & 25 *l.* 12. *tab.* 6.

7. Denique ex eodem 1. corol. habetur

tur cylindricæ ſuperficiei dimenſio, ſi nimirum altitudo ducatur in baſeos peripheriam, ut ſi altitudo ſit pedum 20, peripheria baſis pedum 6; multiplica 20 per 6, proveniunt 120 pedes quadrati pro cylindricâ ſuperficie.

PROPOSITIO XII.

Fig. 6. & 5. tab. 6. Archim.

CYlindri recti ſuperficies eſt ad baſim (A B N) ut cylindri latus (C B) ad (B O) quartam partem diametri baſeos.

Sit G H media proportionalis inter B C & B D diametrum baſis, ac proinde etiam media *a* proportionalis inter B A ſeu A N, & duplam B C. Circulus G P H radii G H æquatur curvæ ſuperficiei *b* cylindricæ C D. Sed circulus G P H ad cylindri baſim A B N rationem habet duplicatam *c* rationis G H ad A N: hoc eſt *d* eandem, quam dupla B C ad B A radium, hoc eſt eandem, quam B C ad B O quartam diametri partem. Ergo etiam ſuperficies cylindrica eſt ad baſim A B N, ut B C ad B O quartam partem diametri B D. Quod erat demonſtrandum.

a *Per lem. ante p. 11. hujus.*
b *Per 11. hujus.*
c *Per 2. l. 12.*
d *Per hyp. & deſin. 10. l. 5.*

Co-

Corollarium.

Superficies cylindri habentis latus diametro baſis æquale baſeos quadrupla eſt. Si verò latus fuerit quarta pars diametri baſeos, ſuperficies cylindri baſi æqualis erit. Utrumque ex propoſitione manifeſtum eſt.

PROPOSITIO XIII.

Circulus, cujus radius (O L) eſt medius proportionalis inter coni recti latus (B C) & baſis radium (AC) æqualis eſt ſuperficiei conicæ. Fig. 9. & 8.

Intelligatur, circulis A C G O P L circumſcripta eſſe polygona ordinata E F, I N, & ſupra polygono E F erectam eſſe pyramidem cono circumſcriptam.

Quoniam per hyp. A C ſeu A G eſt ad O L, ut O L ad B C, erit ratio A G ad BC duplicata *a* rationis A G ad O L. Sed ut A G ad B C, ita triangulum ſub A G & ambitu E F eſt ad triangulum ſub B C & eodem ambitu E F. Ergo ratio trianguli ſub A G, & ambitu E F ad triangulum ſub B C, & eodem ambitu eſt etiam duplicata rationis A G ad O L. Sed triangulum ſub A G & ambitu E F æquale eſt *b* polygono

a *Defin.* 10. *l.* 5.

b *Per* 4. *hujus.*

EF, & triangulum ſub BC & eodem ambitu EF æquale *c* eſt ſuperficiei pyramidis circumſcriptæ. Ergo ratio polygoni EF ad ſuperficiem pyramidis etiam eſt duplicata rationis AG ad OL. Atqui etiam ratio polygoni EF ad polygonum ſibi per conſtr. ſimile IN eſt duplicata *d* rationis AG ad OL. Ergo polygonum EF ad ſuperficiem pyramidis & ad polygonum IN eandem habet rationem, quæ proinde æqualia *e* erunt. Eodem modo oſtendam, ſuperficies pyramidum, quæ cono in infinitum magis magiſque polygonæ circumſcribi poſſunt, ſemper æquales eſſe polygonis, quæ circulo OPL poſſunt circumſcribi etiam in infinitum. Quare, cùm & pyramidum *f* ſuperficies in coni ſuperficiem, & polygona in circulum *i* OPL tandem deſinant, etiam coni *k* ſuperficies & circulus OPL erunt æqualia. Quod erat demonſtrandum.

c Per 9. *hujus.*

d Per 1. *l.* 12.

e Per 9. *l.* 5.

f Per 10. *hujus.*

i Per 3. *hujus.*

k Per 1. *hujus.*

Ex hoc præclaro theoremate exhibetur circulus ſuperficiei conicæ æqualis.

Corollaria.

Fig. 8 & 9. 1. R*Ecti coni ſuperficies æqualis eſt triangulo ſub coni latere (B C) & baſeos peripheriâ (C G) comprehenſo.* Sit

Sit O L radius media proportionalis inter A C & B C. Quia peripheria C G eſt ad peripheriam P, ut *a* radius A G ad radium O L; hoc eſt per hyp. ut O L ad B C: erit triangulum ſub primâ, nempe peripheriâ C G, & ſub quartâ B C *b* æquale triangulo ſub ſecundâ, nempe peripheriâ P, & tertiâ O L; hoc eſt *o* circulo O P L; hoc eſt *d* ſuperficiei conicæ BCD. Quod erat demonſtrandum. a *Per 7. hujus.* b *Patet ex 16. l. 6.* o *Per 5. hujus.* d *Per hanc 13.*

Ex hoc corollario liquet, ſuperficies conicas triangulorum ſubire leges, Itaque.

2. Superficies conicæ B A F, Q X R, æqualia latera B A, Q X habentes, ſunt inter ſe, ut baſium diametri B F, Q R. *Fig. 20. & 21. l. 12. tab. 5.*

3. Et (C F T, A Z B) quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe ut latera (C F, A Z.) *Fig. 32. & 24. l. 12. tab. 6.*

4. Et quæ ſimiles ſunt (B A F, Q Z R) duplicatam habent rationem ejus, quæ eſt inter baſium diametros. *Fig. 20. & 21. l. 12. tab. 5.*

5. Et quælibet rationem inter ſe habent compoſitam ex rationibus laterum (B A, Q Z) & diametrorum (B F, Q R) quæ ſunt in baſibus. *Fig. eâd.*

6. Et quæ æquales ſunt, reciprocant latera & baſium diametros; & quæ reciprocant, ſunt æquales.

Quæ omnia demonſtrantur ex coroll. 1.

ut ſuprà corollaria de cylindricâ ſuperficie deduximus ex corollario iſthic primo.

Fig. 25. l. 12. tab. 6. 7. Metiemur denique conicam ſuperficiem, ſi latus FC per baſeos peripheriam dimidiam multiplicemus. Ut ſi latus ſit pedum 5, peripheria baſeos pedum 20, duc 5 per 10, proveniunt 50 pedes quadrati pro conicâ ſuperficie. Demonſtr. patet ex eodem 1. coroll.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 8. & 9. Archim. tab. 6. *Coni recti ſuperficies eſt ad baſim, ut latus (BC) ad baſis radium (AC.)*

Inter latus BC & baſis radium AC ſit media proportionalis OL. Ergo ratio BC ad AC eſt duplicata *e* rationis OL ad AC. Jam circulus radii OL *f* eſt æqualis ſuperficiei conicæ CBD. Sed hujus ratio ad coni baſim ACG eſt duplicata *g* rationis OL ad AC, ac proinde eadem cum ratione BC ad AC. Ergo etiam ratio ſuperficiei conicæ CBD eſt ad baſim ACG, ut BC ad AC. Quod erat demonſtrandum.

e Defin. 10. l. 5.
f Per 13. hujus.
g Per 2. l. 12.

Co-

Corollaria.

1. *Superficies coni recti, à triangulo æquilatero circa perpendicularem K A circumacto geniti, baſeos Q T dupla eſt.* Fig. 27.

Eſt enim K B latus æquale B D, adeóque duplum ſemiſſis A B, quæ baſeos radius eſt.

2. *Superficies coni à rectangulo triangulo æquicruri E B D producta eſt ad baſim, ut in quadrato diameter ad latus.* Fig. 24.

Ductâ enim perpendiculari B A, *a* angulus rectus B biſecatur, adeóque A B D ſemirectus eſt, eſt autem & A D B *b* ſemirectus. Ergo D A, B A *c* æquales ſunt, ac proinde B C eſt diameter quadrati A K, latus verò A D. Eſt verò eadem A D ſemidiameter baſeos P T, cùm perpendicularis A B ſecet *d* biſariam E D. Ex quibus & hac 14. patet corollarium.

a Patet ex 26. *l.* 1.
b Per corol. 11. *p.* 32. *l.* 1.
c Per 6 *l.* 1.
d Patet ex 26. *l.* 1.

Superficies cylindri recti (G K) eſt ad ſuperficiem coni recti (G B N) ut cylindri latus ad dimidium latus coni. Fig. 24.

Nam ſuperficies coni G B N eſt ad baſim

e Per 14. bujus. ſim M I, ut latus B N ad *e* ſemidiametrum baſis Q N; hoc eſt ut dimidium lateris B N ad quartam partem diametri G N. Eſt autem baſis M I ad ſuperficiem cylindri G K, ut *i* quarta pars diametri ad N K cylindri latus. Ex æquo igitur ſuperficies conica G B N eſt ad ſuperficiem cylindricam G K, ut dimidium latus coni ad cylindri latus N K. Quod erat demonſtrand.

i Per 22. bujus.

Lemma ad ſequent.

Fig. 10. *IN triangulo N P U ducta ſit Q D parallela ad N U.*

Dico, rectangulum ſub P N & N U æquari rectangulo ſub P Q, Q D, unà cum rectangulo ſub N Q & duabus ſimul ſumtis N U, Q D.

Duc lateri N P perpendicularem N A æqualem N U, completoque N O rectangulo, ducatur diameter P A. Tum ex Q parallela Q E ad N A ſecet P A in B. Per B ducatur C F parallela ad N P. Quoniam A N eſt par N U, patet etiam *a* Q B eſſe parem Q D. Igitur rectangulum O N eſt rectangulum P N U, & F Q eſt P Q D. Reſtat ut probemus, rectangula O B, E C, B N æquari rectangulo ſub N Q & duabus N A, Q B, hoc eſt ſub N Q & duabus N U, Q D. Id verò eſt manifeſtum: rectan-

a Ex corol. 1. ſ. 4 l. 6. & ex 11. l. 5.

ctangulum enim ſub N Q, & N A, Q B æquatur *b* his tribus rectangulis ſub N Q & C A (hoc eſt ſpatio E C) ſub N Q, & N C (hoc eſt ſpatio B N) ſub N Q & Q B: hoc eſt rurſum ſpatio B N, ac proinde ſpatio O B, quod ipſi B N *c* æquale eſt. Liquet ergo propoſitum.

b *Per 1. l. 1.*

c *Per. 43. l. 1.*

PROPOSITIO XV.

SI conus rectus ſectus ſit plano Q S R baſi N Z O parallelo, dico, circulum G H M, cujus radius G H eſt medius inter partem lateris N Q, & circulorum Q S R, N Z O radios Q D, N U ſimul ſumtos, æqualem eſſe ſuperficiei conicæ inter parallelos circulos Q S R, N Z O interceptæ.

Fig. 11. & 12.

Inter P N & N U media ſit G F. Item inter P Q & Q D ſit media G K, deſcribanturque circuli G F L, G K T. Erit hic *b* æqualis ſuperficiei conicæ Q P R, ille ſuperficiei *c* N P O. Rectangulum P N U æquatur *d* rectangulo P Q D, unà cum rectangulo ſub N Q, & N U, Q D ſimul ſumtis. Sed quia *e* G F media eſt proportionalis inter P N, N U, rectangulum P N U eſt æquale *f* quadrato G F, & quia G K eſt *i* media inter P Q, Q D, rectan-

b *Per 13. hujus.*
c *Per eand.*
d *Per lem.*
e *Per conſtr.*
f *Per 17. l. 6.*
i *Per conſtr.*

l Per 17. l. 6. ctangulum *l* P Q D æquatur quadrato G K: & quia G H media *k* eſt inter Q N, k Per hyp. & Q D, N U ſimul ſumtas, rectangulum ſub Q N & Q D, N U ſimul ſumtis æquale eſt *n* quadrato G H. Ergo quadratum G F n Per 17. l. 6. par quoque eſt quadratis G A, G K. Ergo cùm circuli ſint inter ſe, ut *o* quadrata o Per 2. l. 12. radiorum, erit quoque circulus G L F æqualis duobus circulis G K T, & G H M. Atqui circulus G L F eſt æqualis *p* ſuperp Per 13. hujus. ficiei conicæ N P O. Ergo etiam ſuperficies æquatur duobus circulis G K T, & G H M. Atqui ſuperficiei N P O pars una r Per eand. Q P R *r* æqualis eſt circulo G K T. Ergo reliqua, inter parallelos circulos Z Z, S S comprehenſa, æquatur circulo G H M. Quod erat demonſtrandum.

Lemma ad ſequent.

Fig. 13. R*Ectæ* (*B H, C G*) *quæ in circulo æquales arcus* (*B C, H G*) *intercipiunt, ſunt parallelæ.*

Ducatur enim C H. Quoniam arcus a Per 29. l. 3. B C, H G per hyp. ſunt æquales, etiam *a* anguli B H C, G C H alterni æquales b Per 28. l. 1. erunt. Ergo *b* B H & C G ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

INſcribatur circulo figura regularis, parilatera & æquilatera; ducaturque E B ab extremitate diametri ad B, terminum lateris diametro proximi, angulos verò æqualiter diſtantes ab A jungant rectæ B H, C G, D F. Fig. 13.

Dico rectangulum, quod diametro A E, & ſubtenſâ E B continetur, æquari rectangulo, quod fit ex latere uno figuræ inſcriptæ (A B, vel B C &c.) & ex omnibus jungentibus B H, C G, D F ſimul ſumtis.

Duc C H, D G: quoniam B H, C G, D F intercipiunt arcus *a* æquales B C, H G, C D, G E, erunt *b* parallelæ. Pari argumento parallelæ ſunt B A, C H, D G, E F. Omnia igitur triangula *c* B A K, K H L, L C M, M G N, N D O, O F E æquiangula ſunt. Ergo *d* ut B K ad K A, ſic H K ad K L; & ut H K ad K L, ſic C M ad M L; & ut C M ad M L, ſic G M ad M N; & ut G M ad M N, ſic D O ad O N; & ut D O ad O N, ſic F O ad O E. Ergo *e* ut una antecedentium B K ad unam conſequentium K A, ſic omnes antecedentes B K, K H, C M, M G, D O, O F (hoc

a *Per 26.*
b *Per lem. præc.*
c *Per 27. & 15. l. 1.*
d *Per 4. l. 6.*
e *Per 12. l. 5.*

(hoc eſt omnes jungentes B H, C G, D F) conſequentes A K, K L, L M, M N, N O, O E, hoc eſt ad diametrum A E. Sed ut i Per 8. l. 6. B K ad *i* A K ſic E B ad B A. Ergo ut omnes ſimul B H, C G, D F ad A E, ſic E B k Per 16. l. 6. eſt ad B A. Ergo *k* rectangulum ſub omnibus jungentibus B H, C G, D F, & ſub B A æquatur rectangulo ſub A E & E B. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 14. *SEgmento circuli D A F, cujus baſis D F perpendicularis ſit diametro A O E, inſcribatur figura æquilatera & parilatera, ducaturque ut in præcedenti recta E B.*

Dico, rectangulum ſub E B & parte diametri A O, quæ ſegmenti axis eſt, comprehenſum, æquari rectangulo ſub latere uno figuræ inſcriptæ, & omnibus jungentibus B H, C G, unà cum D O dimidio baſis D F ſimul ſumtis, comprehenſo.

Demonſtratio eadem quæ præcedentis.

Lemma 1. *ad ſequent.*

Fig. 13. *INſcripta ſit ſphæræ maximo circulo figura regularis, cujus latera quaternarius metiatur, cir-*

ca axem A E conſiſtens: quo manente, circulus cum figurâ circumagatur:

Dico, ſphæræ inſcriptum iri corpus conicis rectis ſuperficiebus contentum.

Quòd B A, H A, item D E, F E deſcribant integras conorum rectorum ſuperficies, manifeſtum *o* eſt. Deinde, quia lineæ C B, G H, & G F, C D concurrunt productæ in eodem utrimque puncto diametri A E ſimiliter pertractæ, quæ jungentes ſecat normaliter, etiam liquet, has deſcribere partes ſuperficierum rectarum conicarum, interceptas inter parallelos circulos, quos in ſphæricâ ſuperficie deſcribunt vertices angulorum B, C, D. o *Vide defin. 2. l. 11.*

Lemma. 2.

SEgmenti ſphæræ, cujus axis A O, ſectio maxima eſto D A F. Huic inſcripta ſit figura æquilatera demtâ baſi, quæ circa axem A O in orbem convertatur. Fig. 14.

Dico, ſegmento ſphærico inſcriptum iri corpus conicis ſuperficiebus contentum.

Probatur ut lemma præced.

PROPOSITIO XVIII.

POnantur eadem quæ in primo lemmate. Fig. 13.

Et ducatur recta E B, ab extremitate

metri ad terminum lateris diametro proximi.

Dico omnibus ſuperficiebus conicis ſphæræ inſcriptis æqualem eſſe circulum, cujus radius (L) poteſt a rectangulum A E B, comprehenſum videlicet ſub diametro A E, & ſubtenſâ E B.

a Potentia recta eſt quadratum ejus.

Hoc eſt, *b* cujus radius (I) eſt medius proportionalis inter A E & E B.

b Per 17. l. 6.

Quoniam rectæ B H, C G, D F æquantur rectis B K, C M, D O *bis* ſumtis, erit *c* rectangulum ſub latere uno figuræ inſcriptæ maximo circulo (videlicet ſub AB, vel BC, vel CD, vel DE) & ſub omnibus ſimul jungentibus B H, C G, D F, æquale rectangulo ſub A B & B K, ſub B C & compoſitâ ex B K & C M, ſub C D & compoſitâ ex C M & D O, ſub D E & D O; ſic enim rectæ B K, C M, D O ſingulæ fuerunt *bis acceptæ*. Atqui rectangulum ſub A B & omnibus jugentibus B H, C G, D F ſimul ſumtis æquatur *d* rectangulo AEB, hoc eſt *e* quadrato I. Ergo quadratum I æquale eſt rectangulis ſub A B & B K, ſub B C & compoſitâ ex BK, CM, ſub C D & compoſitâ ex C M, D O, ſub D E & DO. Sint jam inter A B & B K media proportionalis P; inter B C, & compoſitam ex B K, C M, media Q; inter

c Per 1. l. 2.

d Per 16. hujus.

e Per hyp.

ter CD & compoſitam ex CM, DO, media R; inter DE & DO media S. Erunt igitur quadrata P, Q, R, S æqualia *f* rectangulis ſupradictis. Quare cùm quadratum I jam oſtenderim iiſdem æquari rectangulis, etiam quadratis P, Q, R, S æquale erit. Cùm igitur circuli ſint inter ſe *g* ut quadrata radiorum, etiam circulus radio I deſcriptus omnibus ſimul circulis, quorum radii, P, Q, R, S, æqualis *i* erit. Atqui circuli radiorum P, & S, æquantur *k* ſuperficiebus conicis, quas produxerunt latera AB, ED, ſiquidem P eſt media proportionalis inter AB coni latus, & BK radium baſeos; S verò media eſt inter ED, & DO; circulus radii Q eſt æqualis ſegmento *n* ſuperficiei conicæ, quæ intercipitur inter duos parallelos circulos diametrorum CG, BH, quia Q media eſt inter BC, & compoſitam ex BK, CM; & ob eandem cauſam circulus radii R æquatur ſegmento ſuperficiei conicæ inter parallelos circulos diametrorum CG, DF interceptæ. Ergo circulus radio I deſcriptus æquatur omnibus ſimul conicis ſuperficiebus ſphæræ inſcriptis. Quod erat demonſtrandum.

f *Per 17. l. 6.*

g *Per 2. l. 12.*

i *Patet ex 22. l. 6. & 24. l. 5.*

k *Per 13. hujus.*

n *Per 15. hujus.*

PROPOSITIO XIX.

Fig. 14. *PONantur eadem quæ in 2. lemmate, & ducatur recta E B ab extremitate diametri A E ad terminum lateris A B diametro proximi.*

Dico, omnibus ſuperficiebus conicis ſegmento ſphærico D A F inſcriptis æqualem eſſe circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter EB, & ſegmenti axem A O.

Demonſtratio planè eadem, quæ præcedentis: ſed pro P. 16. citetur P. 17.

PROPOSITIO XX.

Fig. 15. *SUperficies conicæ ſphæræ inſcriptæ in ſphæræ ſuperficiem deſinunt.*

Data ſit ſuperficies quantumvis parva X, manifeſtum eſt intra ſphæricam ſuperficiem A C E G dari aliam poſſe concentricam, quæ ab hac deficiat quantitate minori quàm ſit X. Ambarum plano ſectarum per centrum maximi circuli ſint A C E G, D P L M. Ducatur diameter A D E, & in D tangat N Q. Si arcus A E biſecetur rurſus, & ſic deinceps, relinquetur *a* tandem arcus A B minor arcu A N.

a Patet ex lem. 2. ſchol. poſt 11. l. 6.

A N. Huic ſi ſubtendatur recta A B, manifeſtum eſt, eam non pertingere ad peripheriam P D M L, eſſe que latus figuræ æquilateræ & parilateræ circulo C A G E inſcriptæ, cujus nullum latus pertingat ad peripheriam P D M E. Quare ſi circa diametrum A E in orbem agantur omnia, patet ſuperficiei ſphæricæ exteriori inſcribendas eſſe conicas ſuperficies, quæ includant ſuperficiem ſphæricam alteri concentricam, ac proinde illâ ſint *b* majores. Quoniam igitur ſphærica ſuperficies D P L M deficit à ſuperficie ſphæricâ A C E G quantitate minori quàm ſit data X, multò magis ſuperficies conicæ ab eâdem ſphæricâ A C E G deficient quantitate minori quàm ſit data X, ac proinde *c* in A C E G ſuperficiem deſinent. Quod erat demonſtrandum.

b *Per ax. bujus.*

c *Defin. 6. l. 12.*

PROPOSITIO XXI.

Conicæ ſuperficies ſegmento ſphærico D A F inſcriptæ in ipſam ſegmenti ſphæricam ſuperficiem deſinunt. *Fig. 17.*

Demonſtrabitur eodem ferè ratiocinio, quo præcedens.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 16.

Demonſtratum eſt propoſ. 18., circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter diametrum A E, & rectam E B, quæ ab extremitate diametri ducitur ad terminum lateris A B diametro proximi, æqualem eſſe omnibus ſuperficiebus conicis ſphæræ inſcriptis.

o Vide defin 6. l. 12.

Dico, hunc circulum definere o tandem in circulum, cujus radius eſt A E ſphæræ diameter.

Nam ſi plura ſemper ac plura in infinitum latera circulo maximo inſcribantur (quæ deinde circa A E in orbem acta conicas producunt ſuperficies) patet latus A B fieri tandem quâvis datâ rectâ minus, ac proinde ſubtenſam E B ad diametrum A E accedere ad intervallum etiam quovis dato minus; unde fit ut differentia ipſarum A E, B E etiam fiat quâvis datâ minor. Ergo multò magis media proportionalis inter A E, B E, quæ ſemper major eſt quàm B E, differet ab A E tandem defectu minori quocunque dato. Ergo etiam circulus, cujus ſemidiameter eſt media inter A E, & B E, à circulo, cujus radius eſt A E, tandem differet defe-

ctu

ctu minori quocunque dato: hoc eſt in *i* ipſum deſinet. Quod erat demonſtrandum. *i Defin. 1. l. 12.*

Hæc per ſe ſatis clara non eſt neceſſe operoſiùs demonſtrare.

PROPOSITIO XXIII.

Demonſtratum eſt propoſ. 19., circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter E B & A O ſegmenti axem, æqualem eſſe omnibus ſuperficiebus conicis portioni ſphæricæ D A F inſcriptis. Fig. 17.

Dico, hunc circulum deſinere, in circulum, cujus radius eſt recta A D, à ſegmenti vertice ducta ad peripheriam circuli D Q F N, qui baſis eſt ſegmenti.

Nam quia jam ex præced. demonſtr. liquet, E B deſinere tandem in A E, patebit quoque, mediam proportionalem inter E B & A O deſinere tandem in mediam proportionalem inter A E & A O; hoc *n* eſt in ipſam A D. Manifeſtum eſt igitur, & circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter E B & A O, etiam deſinere in circulum radii A D. Quod erat demonſtrandum. *n Per coroll. 2. p. 8. l. 6.*

Lemma ad ſequent.

SI diameter diametri dupla eſt, circulus circuli quadruplus erit.

Patet ex propoſ. 2. l. 12. & defin. 10. lib. 5.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 16. *CUjuſcumque ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli ejuſdem ſphæræ.*

HOc nobiliſſimum Archimedis theorema ex jam præmiſſis expeditè demonſtrabimus hunc in modum.

Circulo ſphæræ maximo circa diametrum A E intelligatur inſcripta eſſe figura ordinata, cujus latera quaternarius metiatur. Quæ circa A E in orbem ducta producat conicas ſuperficies, ſuperficiei ſphæricæ inſcriptas, ducaturque E B. a Per 18. hujus. Demonſtratum jam ſuprà *a* eſt, omnes conicas ſuperficies ſphæræ inſcriptas æquales eſſe circulo, cujus radius poteſt rectangulum A E B, hoc eſt, cujus radius eſt medius proportionalis inter A E, & E B. Atque hoc ſemper evenit inſcriptionibus in infinitum continuatis. Quare

cùm inſcriptæ conicæ ſuperficies *b* tandem deſinant in ſphæricam ſuperficiem, circulus verò, cujus radius eſt medius inter A E, & E B, deſinat *c* in circulum, cujus radius A E, ipſa quoquè ſphærica ſuperficies *d* æqualis erit circulo radii A E, hoc eſt *e* quadruplo maximi circuli AC E G. Quod erat demonſtrandum.

b *Per* 20. *hujus.*
c *Per* 22. *hujus.*
d *Per* 1. *hujus.*
e *Per lem. præced.*

Viam, quâ in theoremate nobiliſſimo demonſtrando hactenus uſi ſumus, Archimedæâ multò breviorem & clariorem eſſe ſciet, qui Archimedem legerit.

Corollaria.

EX hoc præclaro, atque admirabili theoremate, quo immortale nomen Archimedes apud omnes Geometras conſecutus eſt, exhibetur circulus æqualis ſuperficiei ſphæricæ, is nimirum, cujus ſemidiameter eſt ſphæræ diameter, ſive cujus diameter dupla eſt diametri ſphæræ.

EXpedita jam erit dimenſio ſuperficiei ſphæricæ, principis inter omnes curvas. Duplex eſt modus.

1. *Menſuretur circulus ſphæræ maximus (ut traditur in ſcholio poſt* P. 6. *hujus.) Et multiplicetur per* 4. *Ut ſi maximus orbis terræ circulus inventus ſit continere quadrata milliaria unius horæ ſive Belgica* 5,949,000; *hic numerus qua-*

druplicatus exhibet quadrata milliaria Belgica, 23, 760, 000, quæ in ſuperficie orbis terræ continentur.

2. *Diameter ſphæræ multiplicatæ per circumferentiam maximi circuli exhibet ſphæræ ſuperficiem. Ut ſi terræ diametro dentur milliaria unius horæ 2750$\frac{2}{11}$ atque inde maximi circuli circumferentia eliciatur milliarium 8640; hi duo numeri rurſum quadrata milliaria unius horæ 23, 760, 000 totam orbis terræ ſuperficiem conſtituentia.*

Demonſtratio patet ex primo corol. p. 5. hujus; rectangulum enim ſub diametro ſphæræ, & maximi circuli circumferentiâ, per dictum corol. eſt quadruplum maximi circuli.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 17. *Cujuſcumque portionis ſphæricæ (D A F) ſuperficies æqualis eſt circulo, cujus radius eſt recta (A D) à vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli (D Q F N) qui portionis eſt baſis.*

Portionis maximæ ſectioni inſcripta cogitetur circa axem A O figura æquilatera, & parilatera baſi demtâ; quæ, circa A O in orbem acta, portioni inſcribet conicas ſuperficies. Ducatur quoque recta E B, ut *o* ſuprá. Omnes conicæ ſuperficies ſegmento ſphærico jam inſcriptæ

o In 18. & 19. hujus.

ptæ

ptæ æquantur *a* circulo, cujus radius eſt a Per 19.
medius proportionalis inter E B, & ſeg- bujus.
menti axem A O. Atque hoc multiplica-
tis in infinitum inſcriptionibus ſemper
continget. Quare cùm & conicæ ſuperfi-
cies ſegmento inſcriptæ deſinant *b* in b Per 21.
ſphæricam ſegmenti ſuperficiem, & cir- bujus.
culus, cujus radius inter E B & A O me-
dius eſt, deſinat *c* in circulum radii A D, c Per 23. bujus.
etiam *d* ſphærica portionis ſuperficies d Per 2.
D A F circulo radii A D æqualis erit. bujus.
Quod erat demonſtrandum.

Hoc alterum eſt ex Archimedis inventis nobilioribus, quod, perinde ac præcedens, viâ multò, quàm ipſe, breviori ac clariori jam demonſtravimus.

PROPOSITIO XXVI.

Cylindri recti ſphæra circumſcripti (H P S U) ſuperficies æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ. Fig. 18.

Et ſi cylindrus ac ſphæra ſecentur planis ad axem (B G) rectis, erunt ſingula ſuperficiei cylindricæ ſegmenta ſegmentis ſingulis ſuperficiei ſphæricæ æqualia.

1. Pars. Quoniam cylindri latus H P o Per hyp.
æquale eſt *o* P S diametro baſis, erit cy- a Per corol. 12.
lindrica ſuperficies H S quadrupla *a* ba- bujus.
ſeos,

ſeos¦, hoc eſt, maximi circuli ſphæræ cylindro inſcriptæ; cujus cùm etiam *b* quadrupla ſit ſphæræ ſuperficies, erit hæc æqualis cylindricæ. Quod erat demonſtrandum.

b *Per* 24. *bujus.*

2. Pars. Ducantur rectæ B O, G O. Quoniam angulus B O G *i* rectus eſt in ſemicirculo, ab eoque cadit O C perpendicularis ad B G, erit *c* B O media proportionalis inter G B, & B C, hoc eſt, inter I T & H I. Ergo circulus radii B O *d* æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ H T. Sed idem circulus æqualis *e* eſt etiam ſegmento ſuperficiei ſphæricæ O B K. Æquales igitur ſunt ſuperficies, cylindrica HT, & ſphærica O B K.

i *Per* 31. *l.* 3.
c *Per corol.* 2. *p.* 8. *l.* 6.
d *Per* 11. *bujus.*
e *Per præc.*

Deinde quia eodem modo oſtenditur cylindrica H X æquari ſphæricæ QBR, etiam reliqua cylindrica I X reliquæ ſphæricæ Q O K R, inter duos parallelos circulos interceptæ, æqualis erit.

Ex his patet de ſegmentis omnibus.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 18.

SEgmenta ſuperficiei ſphæricæ parallelis circulis diviſæ eam inter ſe proportionem habent, quam ſegmenta diametri (BC, CD, DA, AE, EF, FG) ad circulos parallelos recta.

Se-

Sequitur ex præcedenti. Sunt enim ſphæricæ ſuperficiei ſegmenta O B K, Q O K R, M Q R N, &c. *a* æqualia cylindricis, H T, I X, L N &c. Atque hæc eandem inter ſe rationem habent, *b* quam axis ſegmenta B C, C D, D A &c. Ergo & illa. Quod erat demonſtrandum.

a *Per præc.*

b *Per 13. l. 1.*

Scholium.

Ex hac innoteſcit proportio zonarum & climatum inter ſe. Sunt enim ad invicem ut ſegmenta axis, quæ nota fiunt ex tabulâ ſinuum.

Ex eâdem habetur dimenſio ſegmentorum ſuperficiei ſphæricæ. Nam quia & tota ſphæræ ſuperficies nota eſt ex ſcholio prop. 24, & ſegmentorum proportio, utpote eadem quæ partium axis, etiam datur, liquet ſegmenta ſingula innoteſcere.

Cæterùm & quatuor præcedentia theoremata, & reliqua omnia, quæ ſequuntur, omnino ſingularia atque admiranda ſunt planéque digna, ad quæ intelligenda Geometriæ ſtudioſi ardenti ſtudio incumbant.

Lemma ad ſequent.

Si ſphæram tangat planum (Q N in O) recta (A O) ex centro ad contactum ducta eſt plano tangenti perpendicularis. Fig. 19.

Secentur planum tangens Q N, & ſphæra, per tactum O duobus planis, quæ in ſphæ-

ſphærâ quidem producant circulos O G, O D, in plano autem Q M rectas C O, I O, quæ circulos contingent in O. Igitur per 18.l.3. A O perpendicularis eſt ad utramque I O, C O, ac proinde per 4. l. 11. recta plano Q N. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 20 22. 21. *Omnis ſphæra æqualis eſt cono (Z O) cujus altitudo (K O) par eſt radio ſphæræ, baſis verò (Z) ſuperficiei ſphæræ æqualis.*

Intelligatur ſphæræ circumſcriptum eſſe corpus aliquod polyëdrum, cujus ſolidi anguli novis planis ſphæram tangentibus abſcindantur. Quo facto orietur aliud corpus polyëdrum ſphæram continens, minus priore, & plurimis conſtans angulis, & ſuperficiem habens ex pluribus ac minoribus planis tangentibus compoſitam. Si polyëdri hujus ſolidi anguli novis planis tangentibus iterum abſcindantur, & tertii polyëdri inde nati ſimiliter, atque ita in infinitum, fiet tandem ut & polyëdrum excedat ſphæram ſolido minori quocunque dato, & ſuperficies ejus ex planis tangentibus (quæ, ut dixi, ſine ter-

ermino & minora, & plura erunt) compoſita ſphæricam ſuperficiem excedat quoque plano minori dato quocunque. Quod utrumque, licèt demonſtrari poſſet, tamen, quia per ſe ſatis clarum, potuletur ſtudio brevitatis. His ita conſtitutis, quæſitum ita concludemus.

Polyëdrum jam expoſitum componitur ex pyramidibus, quarum vertex communis eſt centrum ſphæræ, baſes verò ſunt plana tangentia, quæ polyëdri ſuperficiem conſtituunt. Et quia rectæ ex centro A ad ſingulorum planorum contactus ductæ ad plana *a* ſingula perpendiculares ſunt, erunt omnium pyramidum, quibus conſtat polyëdrum, æqualis altitudo, ipſe nimirum A B radius ſphæræ. Si jam igitur planum X ponatur æquale ſuperficiei ipſius polyëdri, ſuperque eo erecta ſit pyramis ad latitudinem M N etiam æqualem ſphæræ radio A B, manifeſtum eſt *b* omnes pyramides ſupradictas, hoc eſt totum polyëdrum, æquari pyramidi X N. Ad eundem modum reliqua omnia polyëdra ſphæram includentia, quæ ex truncatione perpetuâ ſolidorum angulorum alia atque alia naſcentur in infinitum, ſemper æqualia erunt pyrami-

a *Per lem. præc.*

b *Per 6. l. 12.*

di-

dibus (per X N repræſentatis) quarum altitudines (M N) ſunt radius ſphæræ, baſes verò (X) æquales ſuperficiebus polyëdrorum ſphæram ambientibus. Quare cùm tandem, & polyëdra (ut dixi ſuprà) in ſphæram, & pyramides X N (ut mox oſtendam) in conum Z O deſinant, etiam *c* ſphæra cono æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

c *Per* 1. *hujus.*

Quòd autem pyramides X N *d* deſinant in conum, ſic oſtendo. Polyëdrorum ſuperficies deſinunt in ſphæræ ſuperficiem, ut poſtulatum ſuprà. Atqui baſes X pyramidum X N ſemper æquales ponuntur ſuperficiebus polyëdrorum, & Z baſis coni Z O per hyp. æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ: ergo etiam baſes X deſinent in baſim Z; ac proinde cùm pyramides X N ſint ad conum ex hyp. æquè altum, ut *e* baſis X ad baſim Z, etiam pyramides in conum deſinent.

d *Defin.* 10. *l.* 12.

e *Per corol. p.* 11. *l.* 12.

Demonſtratio jam allata hujus propoſitionis & ſequentis penitùs diverſa eſt ab eâ, quâ uſus eſt Archimedes; quæ quidem valdè ſubtilis & ingenioſa eſt, ſed prolixa & ardua; ad quam videlicet adhibentur duo manifeſta & propoſitiones undecim, præter alias non paucas, à quibus illæ dependent. Ipſum verò theorema ab Archimede proponitur hunc in modum: omnis ſphæra quadrupla eſt co-

coni baſim habentis æqualem maximo circulo ſphæræ; altitudinem verò radium.

Scholium.

EX hoc prænobili theoremate figuræ inter corporeas nobiliſſimæ elicitur dimenſio. Nam ſi diametri ſexta pars, ſive tertia ſemidiametri, multiplicetur per ſphæræ ſuperficiem jam notam per ſcholium prop. 23., *proveniet ſphæræ ſoliditas.*

Inventa ſit ſphæræ terreſtris ſuperficies continere quadrata unius horæ milliaria 23, 790, 000, & *ſemidiameter eſto milliarium horariorum* 1375, *cujus tertia pars eſt* 458 ⅓. *Multiplica* 458 *omiſſâ fractione per* 23, 760, 000, *provenient* 10, 882, 080 000 *cubica unius horæ milliaria pro ſoliditate orbis terræ.*

Cùm enim ſphæra ſit æqualis a *cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ; baſis verò ſuperficies ſphæræ; coni autem ſoliditas* b *producatur ex parte tertiâ altitudinis (hoc eſt radii ſphæræ) ductâ in baſim, hoc eſt in ſphæræ ſuperficiem; etiam ſphæræ ſoliditas obtinetur ex tertiâ parte radii ductâ in ſuperficiem.*

a *Per hanc* 28.
b *Per ſchol. p.* 6. *hujus.*

PROPOSITIO XXIX.

OMnis ſector ſphæræ æqualis eſt cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis verò ſectoris ſphærica ſuperficies.

ESto primùm ſector (AECG) hemiſphærio minor. Intelligatur ſectori *Fig.* 23.

Y cir-

circumſcriptum eſſe polyëdrum corpus rectilineum. Si cætera ratiocinatio omnis ad eundem modum inſtituatur, ut in præcedenti, eodem modo concludetur quæſitum. Id ſolum oportebit oſtendere, ex quo diſcurſus totus dependet, ſuperficiem polyëdri ex planis ſphæricam ſuperficiem E C G undequaque tangentibus compoſitam eſſe majorem ſuperficie E C G. Quod ita fiet. Cogitetur ſuperficiei E C G apponi alia æqualis & ſimilis, planis tangentibus eodem prorſus modo cincta, quo prior. Erit jam tota *c* ſuperficies ex planis compoſita major totâ ſphæricâ. Ergo etiam dimidia ex planis compoſita dimidiâ ſphæricâ E C G major erit.

c Per ax. hujus.

Eſto deinde ſector (A E B G) major hemiſphærio. Uterque ſector ſimul ſumtus æqualis *d* eſt cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis autem tota ſuperficies: hoc eſt *e* duobus conis, quorum altitudo eadem, baſes verò pares ſuperficiei ſphæricæ ſegmentis E C G, E B G. Atqui ſectorum unus A E C G hemiſphærio minor per 1. partem æquatur cono, cujus altitudo eſt radius, baſis verò ſuperficies E C G. Ergo alter A E B G æquatur cono reliquo, cujus altitudo eſt re-

d Per præc.
e Patet ex 11. l. 12.

radius, basis verò ſuperficies reliqua E B G. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

CUm ſuperficies E C G ſit æqualis o circulo radii C G, & ſuperficies E B G æqualis circulo radii B G, erunt ſectores A E C G, & A E B G æquales conis, quorum altitudo eſt radius ſphæræ, baſes verò circuli radiorum C G, & B G. o *Per 25. hujus.*

Scholium.

EX his habetur dimenſio & ſectorum, & ſegmentorum ſphæræ; ſectorum quidem, ſi multiplicetur p *tertia pars radii per ſphæricam ſectorum ſuperficiem, jam notam ex ſcholio prop. 27, ſive per circulum radii C G, vel B G: ſegmentorum verò, ſi menſuretur conus E A G, & à ſectore, ſi minor eſt hemiſphærio, auferatur; ſi major, eadem adjiciatur.* Fig. 23. p *Patet ex ſchol. p. 6. hujus.*

Segmentum (M Q R M) quod inter duos circulos, ſive parallelos, ſive non parallelos, interjicitur, menſurabis, ſi ſegmenta Q B R, M B N jam nota auferantur ab invicem. Fig. 18.

PROPOSITIO XXX.

HEmiſphærium (E O B D) coni (E B D) eandem ſecum baſim & altitudinem habentis duplum eſt. Fig. 24.

Conus, cujus baſis eſt ſuperficies hemiſphærica E O B D, altitudo autem radius A B eſt ad conum E B D, *a* ut baſis ad baſim, hoc eſt, ut ſuperficies hemiſphærica E O B D ad maximum circulum P T. Ergo, cùm ſuperficies hemiſphærica E O B D dupla *b* ſit maximi circuli, etiam conus pro baſi habens ſuperficiem E O B *D*, pro altitudine radium A B, duplus *eſt* coni E B D. Atqui hemiſphærium æquatur *c* cono habenti pro altitudine radium, pro baſi ſuperficiem hemiſphæricam E O B D. Ergo etiam hemiſphærium coni E B D duplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

a *Per* 11. *l.* 12.

b *Per* 24. *hujus.*

c *Per* 28. *hujus.*

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 25.

S*Phæra ſit diviſa in duo ſegmenta I* L B G, *I S K G, plano I Q G T centrum A non tranſeunte: diameter autem plano ſecanti recta ſit B O K.*

Ut altitudo O B ſegmenti I L B G eſt ad radium ſphæræ A B, ita O K altitudo ſegme[nti] alterius fiat ad aliam K N.

Pari modo, ut O K altitudo ſegmenti I[...] K[...]

K G eſt ad radium A K, ſeu A B, ita altitudo O B ſegmenti alterius fiat ad aliam B D.

Dico 1. *Coni I N G & I D G, quorum altitudines ſunt O N, O D, baſis verò communis I Q G T, ſegmentis ſphæricis ſunt æquales.*

2. *Segmentorum eadem eſt proportio, quæ rectarum D O, N O.*

3. *Segmentum I S K G eſt ad maximum ſibi inſcriptum conum I K G, ut N O ad K O, & ſegmentum I L B G eſt ad ſibi inſcriptum conum maximum I B G, ut D O ad B O.*

Pars 1. Sphæra & coni ſecentur plano per diametrum BK. Producentur in ſphærâ circulus maximus B L K G, in conis verò triangula B I G, I K G. Et quia B O K diameter *a* recta eſt circulo Q T, erit angulus I O B *b* rectus. Angulus quoque B I K *c* in ſemicirculo rectus eſt. Quoniam igitur in triangulo B I K ab angulo recto ducta eſt I O perpendicularis in baſim B K, erit B I ad I O, ut *d* B K ad K I. Ergo ratio duplicata B I ad I O æqualis eſt rationi duplicatæ B K ad K I; hoc eſt (quia B K, K I, K O *f* ſunt tres

a *Per hyp.*
b *Per defin.* 3 *l.* 11.
c *Per* 31. *l.* 3.
d *Per* 8. *l.* 6.
f *Per corol.* 2. *p.* 8. *l.* 6.

proportionales) æqualis rationis B K ad K O.

Deinde, quia eſt, ut O K ad radium A B,
o Per hyp. ita *o* O B ad B D; erit quoque invertendo D B ad B O, ut A B ad O C: & permutando D B ad B A, ut B O ad O K: & componendo D A ad B A, ut B K ad O K. Quoniam igitur jam oſtendi, rationem B K ad O K duplicatam eſſe rationis B I ad I O, ac proinde æqualem *p*
p Per 2. l. 12. rationi circulorum radiis B I, I O deſcriptorum, erit quoque D A ad B A, ut circulus radii B I ad circulum radii I O. Igitur conus ſub altitudine D A, & baſi circulo radii I O, hoc eſt circulo Q T, æqualis eſt *g* cono ſub altitudine B A, &
g Per 15. l. 12. baſi circulo radii B I; hoc eſt, ſectori ſphærico A I B G. Quare ſi tam *i* ſectori *A I B G*, quàm cono ſub D A & circulo Q T,
i Per corol. p. 29 hujus. addatur idem conus I A G, tota erunt æqualia; videlicet ſegmentum Sphæricum I L B G æquabitur duobus conis, quorum unus eſt, qui fit ſub baſi Q T, & altitudine D A, alter I A G, ſub eâdem baſi Q T, & altitudine O A. Sed hi duo coni
k Patet ex 14. l. 12. *k* conficiunt conum I D G. Ergo ſegmentum I L B G cono I D G æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

Eo-

Eodem diſcurſu erit ſegmentum I S K G æquale cono I N G, eo ſolùm mutato, ut conus I A G, qui priùs addebatur, jam auferatur.

Pars 2. Patet ex primâ. Nam coni I D G & I N G ſunt inter ſe *n* ut D O, & N O. Ergò & ſegmenta I L B G, I S K G, conis illis æqualia, ſunt inter ſe, ut rectæ D O, N O. n Per 14. l. 12.

Pars 3. Patet ſimiliter ex primâ. Nam conus I D G eſt ad conum I B G, *q* ut D O ad B O. Ergo ſegmentum I L B G, cono I D G E æquale, eſt ad conum I B G, ut D O ad B O. q Per eand.

Scholium.

EX primâ parte hujus theorematis habetur alia, eaque facillima ſegmentorum ſphæricorum dimenſio; ſi nimirum coni I D G, I N G menſurentur; quod fiet ſi s *tertiæ partes rectarum D O, N O ducantur in circulum Q T.* s *Vide Schol. poſt. 6. hujus.*

PROPOSITIO XXXII.

CYlindrus rectus (G K) ſphæræ, cui circumſcribitur, & ſoliditate, & ſuperficie totâ ſeſquialter eſt. Fig. 24.

Communis ſphæræ ac cylindri axis eſto

BQ, conus verò maximus hemiſphærio EOBD inſcriptus ſit EBD. Quia cylindrus EK (ſemiſſis totius GK) triplus *a* eſt coni EBD, hemiſphærium verò *b* ejuſdem coni duplum, patet, cylindrum EK eſſe ad hemiſphærium, ut 3 ad 2. Ergo etiam totus cylindrus GK eſt ad totam ſphæram QEBD, ut 3 ad 2. Quod erat primum.

a Per 10. l. 12.
b Per 30. hujus.

Deinde, quia cylindri latus KN eſt æquale baſis diametro GN, erit ejus ſuperficies abſque baſibus *c* quadrupla baſeos MI, ac proinde cum baſibus, hoc eſt tota cylindri ſuperficies erit ſecupla baſeos MI, quæ par eſt maximo ſphæræ circulo. Atqui ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli. Ergo tota cylindri GK ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, ut 6 ad 4, ſive ut 3 ad 2. Quod erat alterum.

c Per corol. p. 12. hujus.

Igitur cylindrus ſphæræ ſibi inſcriptæ, & ſoliditate, & totâ ſuperficie ſeſquialter eſt. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

QUanti hoc theorema fecerit Archimedes a argumento eſt, quòd tumulo ſuo ſphæram cylindro inſcriptam apponi voluerit. Atque idcirco for-

Fortaſſe inter alia tam multa & præclara inventa ſua hoc illi præ reliquis placuit, quòd & corporum, & ſuperficierum corpora ipſa continentium eadem eſſet atque una rationalis proportio. Similem affectionum identitatem annulos inter annulorumque ſuperficies demonſtravimus lib. 4. Cylindricorum, & Annularium prop; 13. 14. 15. Sed & ipsâ in ſphærâ aliud mihi hujus rei exemplum illuſtre ſeſe obtulit. Deprehendi ſiquidem, quemadmodum ſphæra ad cylindrum rectum ſe ambientem (qui neceſſariò æquilaterus erit) eſt tam ſoliditate, quàm ſuperficie, ut 2 ad 3; ita ſphæram ad æquilaterum conum ſe ambientem, & ſoliditate ſimiliter, & ſuperficie eam habere proportionem, quam 4 ad 9. Ex quo deinde illud conſequitur, ſeſquialteram proportionem ab Archimede in cylindro & ſphærâ repertam, in tribus ſolidis, ſphærâ, cylindro, & cono æquilatero continuari. Utriuſque demonſtrationem, pluraque alia theoremata noſtra, quibus ſphæræ natura mirabilis ampliùs innoteſcet, tredecim ſequentibus propoſitionibus comprehenſa, ſubjungam.

PROPOSITIO XXXIII.

Superficies ſphæræ dupla eſt ſuperficiei cylindri quadrati ſphæræ inſcripti.

Quadratum maximo ſphæræ circulo inſcriptum, à quo in orbem ducto deſcribitur quadratus cylindrus, eſto AKL, ducaturque AL, diameter quadrato & ſphæræ communis. Quoniam quadratum

a Per 47. l. 1. AL par *a* eſt qnadratis æqualibus A K, KL, erit duplum unius A K. Ergo etiam circulus diametri A L duplus *b* eſt circuli, cujus diameter A K, circuli nempe CN. Atqui ſuperficies ſphæræ quadrupla *c* eſt circuli, cujus diameter A L, is enim eſt maximus ſphæræ circulus, cùm A L ſit ſphæræ diameter. Ergo ſphæræ ſuperficies octupla eſt circuli C N. *Sed* quia L K, K A *d* æquales ſunt, cylindrica ſuperficies A C L quadrupla *e* eſt circuli C N. Ergo cùm ſphæræ ſuperficies ejuſdem circuli octupla ſit, cylindricæ ſuperficiei dupla erit. Quod erat demonſtrandum.

b *Patet ex* 2. *l.* 12.

c *Per* 24. *hujus.*

d *Per hyp.*

e *Per corol. p.* 12. *hujus.*

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 26.

SPhæræ ſuperficies ad totam cylindri quadrati ſibi inſcripti ſuperficiem eam proportionem habet, quam 4 *ad* 3.

Ponantur eadem, quæ demonſtr. præced. Quoniam cylindri latus LK, & baſis diameter A K *f* æquales ſunt, erit ſuperficies cylindrica C L *g* quadrupla baſis C N, ac proinde tota cylindri ſuperficies ad utramque baſim C N & S L eſt, ut 6. ad 2. Atqui ſphæræ ſuperfi-

f *Per hyp.*

g *Per corol. p.* 12. *hujus.*

ficies eſt ad utramque ſimul baſim C N, S L, ut 8. ad 2. cùm in præced. oſtenſa ſit eſſe ad unam baſim, ut 8. ad 1. Ergo ſphæræ ſuperficies eſt ad cylindricam CL ſuperficiem, ut 8. ad 6. ſive ut 4. ad 3. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

TOta cylindri recti ſphæræ circumſcripti ſuperficies eſt ad totam ſuperficiem cylindri æquilateri inſcripti, ut 2. ad 1. Nam circumſcripta eſt ad ſphæricam ut 12. ad 8. per 32. hujus. Sphærica autem eſt ad inſcriptam, ut 8. ad 6. per hanc. Ergo ex æquo circumſcripta eſt ad inſcriptam, ut 12. ad 6. ſive ut 2. ad 1.

PROPOSITIO XXXV.

CUjuſcunque portionis ſphæricæ ſuperficies (I L B G) ad ſuperficiem coni maximi inſcripti eam rationem habet, quam coni latus (B G) ad baſis radium (G O.) Fig. 26. vel 25.

Quoniam portionis I L B G ſuperficies *a* æqualis eſt circulo radii B G, erit proportio ejus ad circulum Q T, baſim nempe ſuam & coni, duplicata

a Per 25. hujus.

ta

b Per 2. l. 12. ta *b* rationis B G ad G O; hoc eſt *c* rationis ſuperficiei conicæ I B G ad baſim c Per 14. bujus. eandem Q T. Ergo liquet *o* ſuperficiem o Per defin. 10. l. 5. I L B G eſſe ad ſuperficiem conicam IBG, ut eadem conica I B G eſt ad baſim Q T. Quare cùm conica I B G ſit ad baſim QT, d Per 14. bujus. *d* ut B G ad G O, etiam portionis ſuperficies erit ad conicam I B G ſibi inſcriptam, ut B G ad G O. Quod erat *demonſtrandum*.

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 24. *HEmiſphærii ſuperficies (E O B D) ad coni maximi ſive recti inſcripti ſuperficiem (E B D) eam rationem habet, quam in quadrato diameter ad latus: ad ſuperficiem verò coni ſimilis circumſcripti, ut latus in quadrato ad diametrum.*

1. Partis demonſtratio ex præcedenti eſt manifeſta; eſt enim proportionis cujuſcunque, ac proinde & hemiſphærii ſuperficies E O B D ad conicam inſcriptam, ut B D ad D A. Eſt autem B A D K quadratum, cujus diameter eſt B D, latus D A.

Fig. 6. lib. 4. tab. 3. 2. Pars. Semiſſis quadrati circulo (cujus centrum A) circumſcripti eſto E B C,

quâ

quâ circa axem A B circumactâ gignatur conus hemiſphærio conſcriptus. Quoniam quadratum E C duplum *a* eſt quadrati E B, ſeu G I, etiam circulus diametri E C duplus *b* eſt circuli, cujus diameter G I, hoc eſt, circuli H G D I. Atqui *c* ſuperficies hemiſphærii cono E B C incluſi ejuſdem circuli dupla eſt. Ergo circulus diametri E C ſuperficiei hemiſphæricæ æqualis eſt. Quare cùm ſuperficies conica E B C ſit ad *d* circulum diametri E C, baſim nempe ſuam, ut latus B E ad baſis radium E A, erit quoque ad ſuperficiem hemiſphæricam ſibi inſcriptam, ut B E ad E A, hoc eſt, ut diameter in quadrato E B C F ad ſuum latus. Quod erat demonſtrandum.

a *Patet ex* 47. *l.* 1.

b *Per* 2. *l.* 12.

c *Per* 24. *hujus.*

d *Per* 14. *hujus.*

PROPOSITIO XXXVII.

Sphæra ad quadratum rhombum conicum ſibi circumſcriptum, & ſoliditate, & ſuperficie eam proportionem habet, quam in quadrato latus ad diametrum.

Fig. eâdem cum Fig. 13. *l.* 5. *tab.* 3.

Maximo ſphæræ circulo H G D I circumſcriptum eſt quadratum E B C F, à quo circa axem B F in orbem acto rhombus conicus gignatur ſphæram ambiens.

Ut

Ut EB quadrati latus (inſpice Fig. 6. l. 4.) ad diametrum EC, ita fiat S ad R (inſpice Fig. 13. l. 5.) quæ proportio per 4. terminos S, R, Q, O continetur. Erit igitur ratio S ad O triplicata *a* rationis S ad R, hoc eſt, EB ad EC; & ratio O ad R erit duplicata rationis O ad Q, ſive R ad S, hoc eſt EC ad EB, ac proinde *b* O eſt ad R, ut quadratum EC ad quadratum EB; unde O eſt dupla ipſius R. His ita conſtitutis, intelligatur rhombo conico ſphæra circumſcribi EBCF. Erit igitur ſphæra HGDI ad ſphæram EBCF in *o* ratione triplicatâ diametri GI (ſive EB) ad diametrum EC; hoc eſt (quod jam oſtendi) erit ut S ad O. Sphæra autem EBCF eſt ad rhombum conicum ſibi inſcriptum *c* ut 2. ad 1; hoc eſt (quod oſtendi ſuprà) ut O ad R. Igitur ex æquo ſphæra HGDI eſt ad eundem rhombum, qui ei eſt circumſcriptus, ut S eſt ad R, hoc eſt, ut in quadrato latus EB ad diametrum EC. Quod erat primum. Deinde ex ſecundâ parte præcedentis patet, hemiſphæræ ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem coni EBC, ac proinde & totius ſphæræ ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem totius rhombi EBCF, ut latus in quadrato ad dia-

a Per defin. 10. l. 5.

b Per 20. l. 6.

o Per 18. l. 12.

c Per 30. hujus.

diametrum. Ergo ſphæra tam ſoliditate, quàm ſuperficie eſt ad rhombum quadratum EBCF, ut in quadrato latus ad diametrum. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.

Superficies portionis (BGKD) conum æquilaterum (BKD) capientis dupla eſt ſuperficiei ejuſdem coni. Fig. 27.

Patet ſimiliter ex 35. Nam ſuperficies portionis BGKD eſt ad inſcriptam conicam, ut a BK ad BA. Sed quia conus BKD æquilaterus ponitur, KB eſt æqualis BD, adeóque dupla BA. Ergo etiam ſuperficies BGKD dupla eſt inſcriptæ conicæ BKD. Quod erat demonſtrandum.

a Per 35. hujus.

PROPOSITIO XXXIX.

Sphæræ ſuperficies ad totam coni æquilateri ſibi inſcripti ſuperficiem eam proportionem habet, quam 16 *ad* 9. Fig. 27.

Eſto Z ſphæræ centrum, & conus æquilaterus ſphæræ inſcriptus BKD, axis ſphæræ ac cono communis KZAO. Per hunc

hunc ſi ſecetur ſphæra ac conus, producetur in ſphærâ circulus maximus O B K D, in cono autem triangulum æquilaterum B K D, cujus unum latus B A D erit diameter baſeos conicæ Q T. Et quia axis coni K A rectus eſt baſi Q T, erit angulus B A K *d* rectus. Igitur quadratum B A æquale eſt *e* rectangulo K A O. Jam quia latus æquilateri trianguli abſcindit *f* quartam axis partem A O, erit rectangulum K A O, hoc eſt quadratum B A, triplum quadrati *i* A O. Quare cùm quadratum radii Z O *k* quadruplum ſit quadrati A O, erit quadratum radii Z O ad quadratum radii B A, ut 4. ad 3. Ergo etiam *m* circulus O B K D eſt ad circulum Q T, ut 4 ad 3. Ergo ſunt quatuor circuli O B K D, hoc eſt *n* tota ſphæræ D G ſuperficies, ad circulum Q T, ut 16 ad 3. Atqui *o* ſuperficies coni æquilateri B K D eſt ad circulum Q T, baſim nempe ſuam, ut 2. ad 1, ac proinde coni B K D tota ſuperficies, unà cum baſi ſcilicet, eſt ad baſim, nempe circulum Q T, ut 3. ad 1. ſive ut 9. ad 3. Ergo cùm oſtenderim, ſphæræ ſuperficiem eſſe ad eundem circulum, ut 16. ad 3. erit ſphæræ D G ſuperficies ad totam æquilateri coni ſuperficiem,

d *Per defin.* 3. *l.* 11.
e *Per corol. p.* 17. *l.* 6.
f *Per corol.* 5. *p.* 15. *l.* 4.
i *Per* 1. *l.* 6.
k *Per* 4. *l.* 2. *vel* 20. *l.* 6.
m *Per* 2. *l.* 12.
n *Per* 24. *hujus.*
o *Per corol.* 1. *p.* 14. *hujus.*

ficiem, ut 16 ad 9. Quod erat demonſtrandum.

Aliter.

QUoniam æquilateri trianguli latus BD abſcindit *p* quartam axis partem AO, erit quoque ſphærica ſuperficies BOD *q* quarta pars, ac proinde ſuperficies BGKD tres quartæ ſuperficiei totius ſphæræ. Quare ſi ſuperficies tota ſtatuatur eſſe 16, BGKD ſuperficies erit 12. Atqui ſuperficies BGKD *r* eſt dupla ſuperficiei conicæ BKD, ac proinde ad eam eſt ut 12 ad 6. Ergo tota ſphæræ ſuperficies eſt ad conicam BKD, ut 16 ad 6. Deinde quia ſuperficies coni BKD (utpote æquilateri) dupla *s* eſt baſeos QT, liquet ſuperficiem conicam BKD (nimirum abſque baſi) eſſe ad totam coni ſuperficiem, ut 2 ad 3, hoc eſt ut 6 ad 9. Igitur ex æquo tota ſphæræ ſuperficies eſt ad totam æquilateri coni inſcripti ſuperficiem, ut 16 ad 9. Quod erat demonſtrandum.

p *Per corol. p. 15. l. 4.*
q *Per 27. hujus.*
r *Per præc.*
s *Per corol 1. p. 14. hujus.*

PROPOSITIO XL.

Fig 28.

S*Phæræ ſuperficies ad æquilateri coni ſibi circumſcripti totam ſuperficiem eam proportionem habet, quam 4 ad 9.*

Circulo ſphæræ maximo B P M circumſcriptum ſit triangulum æquilaterum D O F, à quo circa axem O A B in orbem ducto productus ſit conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus. Æquilatero autem triangulo D O F circumſcriptus etiam ſit circulus N D L O F, quem patet eſſe concentricum priori; & axis O A B perducatur in N. Quoniam B N eſt *a* quarta pars axis O N, patet O N eſſe duplam K B. Quare cùm circulorum ratio ſit *b* duplicata rationis diametrorum, erit circulus B P M ad circulum N D L O F, ut 1 ad 4. Atqui oſtenſum jam eſt in demonſtratione primâ præcedenti, circulum N D L O F eſſe ad circulum Q T, baſim coni æquilateri ſphæræ F L inſcripti, ut 4 ad 3. Ex *c* æquo igitur circulus B P M eſt ad circulum Q T ut 1 ad 3. Atqui tota coni D O F ſuperficies circuli Q T *d* tripla eſt. Ergo tota coni ſuperficies circuli B P M noncupla eſt. Quare cùm ſphæræ T P ſuperficies ejuſdem circuli B P M *e* quadrupla ſit, erit tota coni æquilateri D O F ſuperficies ad ſuperficiem ſphæræ, cui circumſcripta eſt, ut 9 ad 4. Quod erat demonſtrandum.

a Per corol. 5. p. 15. l. 4.

b Per 2. l. 12.

c Per 22. l. 5.

d Per corol. 1 p. 14. hujus.

e Per 24. hujus.

PRO-

PROPOSITIO XLI.

Æquilateri coni ſphæræ circumſcripti tota ſuperficies quadrupla eſt ſuperficiei totius coni inſcripti eidem ſphæræ. Fig. 28.

Æquilateri coni DOF circumſcripti tota ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, ut *a* 9 ad 4: & ſphæræ ſuperficies eſt ad coni inſcripti æquilateri SKT ſuperficiem, ut *b* 16 ad 9. Ergo ex *c* æqualitate perturbatâ circumſcripti æquilateri coni tota ſuperficies eſt ad totam ſuperficiem æquilateri inſcripti, ut 16 ad 4, ſive ut 4 ad 1. Quod erat demonſtrandum.

a *Per præc.*
b *Per 39. hujus.*
c *Per 23. l. 5.*

PROPOSITIO XLII.

Sphæra ad inſcriptum ſibi conum æquilaterum (BKC) eam rationem habet, quam 32 ad 9. Fig. 19.

Sphæra & conus BKC ſecentur plano per axem communem KO, faciente in ſphærâ circulum maximum OFKI, in cono autem triangulum æquilaterum BKC. Ducto deinde plano per centrum A ad GK recto, abſcindatur hemiſphærium FGKI, cui inſcriptus intelligatur co-

nus maximus FKI. Quoniam trianguli
d Per corol. 5 p. 15 l. 4. æquilateri latus BC abſcindit OP *d* quartam partem axis OK, erit PK ad AK, ut 3 ad 2, hoc eſt, ut 9 ad 6. Baſis verò QT eſt ad circulum GFKI, hoc eſt ad baſim ND, ut 3 ad 4, hoc eſt, ut 6 ad 8, uti patet ex demonſtratis prop. 39. Quare cùm ratio coni BKC ad conum FKI com-
e Per ſchol. p. 15. l. 12. ponatur *e* ex ratione altitudinis PK ad altitudinem AK (hoc eſt ex ratione 9 ad 6) & ex ratione baſis QT ad baſim ND (hoc eſt ex ratione 6 ad 8) erit conus BKC ad conum FKI, ut 9 ad 8. Quare cùm ſphæ-
f Per 30. hujus. ra CG quadrupla *f* ſit coni FKI, erit conus æquilaterus BKC ad ſphæram CG, ut 9 ad 32. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 28. *Conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus coni æquilateri eidem ſphæræ inſcripti octuplus eſt.*

Coni æquilateri ſphæræ inſcripti, & circumſcripti ſint SCT & DOF, & axis communis eſto OKB. Secentur deinde plano per axem tam conus uterque quàm ſphæra; eruntque ſectiones triangula duo

duo æquilatera, & circulus BPM maximus. Circa triangulum quoque DOF intelligatur deſcriptus eſſe circulus N D O F, & axis O K B producatur in N. Quoniam verò æquilateri trianguli latus DF abſcindit axis ON quartam *a* partem NB, patet N O eſſe duplam BK. Similiter quia æquilateri alterius trianguli latus S T abſcindit axeos B K *b* quartam partem B C, erit N O ad B O, ut B K ad CK: & permutando, ut N O ad B K, ſic B O ad C K. Sed NO dupla eſt B K. Ergo etiam B O dupla eſt C K. Igitur ob ſimilitudinem triangulorum DOF, SKT, etiam *c* D F & S T, diametri videlicet baſium conicarum, ſunt inter ſe in proportione duplâ. Quare cùm coni D O F, S K T ſint ſimiles, ac proinde eorum proportio *d* triplicata ſit proportionis diametrorum D F & S T, quæ eſt 2 ad 1, erit conus D O F ad conum S K T, ut 8 ad 1. Quod erat demonſtrandum.

a Per coroll. 5 p. 15 l. 4

b Per idem coroll.

c Per 4 l. 6.

d Per 12. l. 12.

PROPOSITIO XLIV.

Fig 28. *Sphæra ad circumſcriptum ſibi conum æquilaterum (D O F) & ſoliditate & ſuperficie eam proportionem habet, quam* 4 *ad* 9.

d Per 42. bujus. Sphæra T P eſt ad inſcriptum *d* ſibi conum æquilaterum S K T, ut 32 ad 3. Inſcriptus autem S K T conus æquilaterus eſt ad conum æquilaterum circumſcriptum D O F, ut *f* 1 ad 8, hoc eſt, ut 9 ad 72. f Per præ. Igitur ex æquo ſphæra T P eſt ad conum æquilaterum circumſcriptum D O F, ut 32 ad 72; hoc eſt, ut 4 ad 9. Propoſitione autem 40. demonſtravimus, etiam ſphæræ ſuperficiem eſſe ad totam æquilateri coni circumſcripti ſuperficiem, ut 4 ad 9. Ergo ſphæra & ſoliditate & ſuperficie eſt ad æquilaterum conum ſibi circumſcriptum, ut 4 ad 9. Quod erat demonſtrandum.

Quod igitur in ſphærâ & cylindro ſphæram ambiente miratus eſt Archimedes, id ipſum in ſphærâ, & æquilatero cono ambiente ſphæram jam demonſtravimus, ut videlcet & ſoliditatum inter

ter ſe eadem proportio rationalis, quæ ſuperficierum, exiſtat. Quemadmodum enim ille reperit ſphæram ad cylindrum eſſe tam ſoliditate, quàm ſuperficie, ut 2 ad 3; ita nos docuimus, ſphæram & ſoliditate & ſuperficie eſſe ad conum æquilaterum ſe ambientem, ut 4 ad 9.

Hinc verò illam ipſam proportionem, nempe ſeſquialteram, quam exiſtere ſphæram inter ac cylindrum Archimedes tradidit, ab æquilatero cono circumſcripto & ſoliditate etiam ac ſuperficie continuari nullo negotio jam demonſtrabimus, atque ita huic pariter opuſculo finem imponemus.

PROPOSITIO XLV.

Vide Fig. quæ huic tractatui præfixa eſt.

Conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus, & cylindrus rectus ſphæræ ſimiliter circumſcriptus, & ipſa ſphæra, eandem proportionem continuant, nimirum ſeſquialteram, tam quoad ſoliditatem, quàm quoad ſuperficiem totam.

Nam per 32. hujus cylindrus rectus G K ſphæram ambiens tam ſoliditate, quàm totâ ſuperficie, eſt ad ſphæram ut 3 ad 2, ſive 6 ad 4. Per præcedentem verò circumſcriptus ſphæræ conus æquilaterus B A D, tam ſoliditate, quàm ſuperficie, eſt ad ſphæram ut 9 ad 4. Ergo idem

conus eſt ad cylindrum tam ſoliditate, quàm ſuperficie, ut 9 ad 6. Quare hæc tria corpora conus, cylindrus, ſphæra ſunt inter ſe, ut hi numeri 9, 6, 4; ac proinde continuant proportionem ſeſquialteram. Quod erat demonſtrandum.

FINIS.

APPENDIX,

Quâ demonſtratur, ex falſò poſſe directè deduci verum.

IN theſibus Mathematicis, quas Lovanii ſeſqui abhinc anno Illuſtriſſ. D. Theodorus d'Imerſelle, Comes de Bouchove & S. Imperii, magnâ ingenii commendatione & auditorum plauſu publicè propugnavit, inter cæteras propoſui aſſertionem hujuſmodi: *ex falſis poſſe verum directè elici novis exemplis Geometricis confirmamus.* Hanc aſſertionem ſibi oppugnandam ſuſcepit vir Clariſſimus Daniel Lipſtorpius in appendice, quam operi ſuo pereruditо, quod Specimina Philoſophiæ Carteſianæ inſcripſit, hac de causâ adjunxit. Id verò eâ modeſtiâ & humanitate præſtitit, ut facilè appareat, hoc illi unum fuiſſe propoſitum, ut veritatem aſſequeretur. Ne autem videar doctiſſimi viri judicium parvi facere, hîc illi breviter reſpondebo, & appendici appendicem reponam.

Concluſionem igitur oppugnatam ſic demonſtro.

Datur aſſertio, quæ directè ex ſuâ contradictoriâ inferatur. Talis in prop. 12. l. 9. Eucl. eſt hæc: *numerus E metitur numerum A*, quæ demonſtratione affirmativâ infertur ex ſuâ contradictoriâ: *E non metitur numerum A*. Quod quidem eſt æquè certum, ac demonſtrationem illam eſſe legitimam. Talis in Elementis hiſce noſtris prop. 4. l. 11. eſt hæc: b *Recta BQ non eſt perpendicularis plano CAF*, quæ affirmativè deducitur ex ſuâ contradictoriâ: c *recta BQ eſt perpendicularis plano CAF*. Talis in propoſitione noſtrâ 35. l. 5. eſt hæc: *A eſt ad B, ut E ad Z*, quæ directè infertur ex ſuâ contradictoriâ: *A non eſt ad B, ut E ad Z*. Tales denique reperiuntur apud Cardanum l. 5. per proport. p. 201. apud Theodoſium (commentante Clavio) l. 1. ſph. p. 12. & nos plures ſimiles poſſumus exhibere, tum Geometricas, tum alias.

b *Fig.* 12. *l.* 11. *tab.* 5.
c *Fig.* 20. *l.* 5. *tab.* 3.

Ecce tibi coſmographicam unam, quam in iiſdem theſibus diſputandam propoſui. *Maris, omniſque adeo humidi ſuperficies eo ipſo concluditur eſſe ſphærica, quo id negas.* Ponatur vera eſſe ejus contradictoria; *Maris ſuperficies ſphærica non eſt*. Quoniam igitur maris ſuperficies ſphærica non eſt, ergo

go omnes maritimæ partes non diſtant æqualiter à centro. Ergo una eſt altior alrâte (altiorem enim eſſe non aliud eſt, quàm longiùs à centro recedere) ergo eæ, quæ altiores ſunt, defluunt verſus minùs altas ſeu decliviores, hanc enim eſſe humidi naturam experientiâ conſtat. Ex tali autem defluxu neceſſariò oritur omnium partium ſuperficiei maritimæ æqualis altitudo, ſeu diſtantia à centro. Æqualis verò omnium partium ſuperficiei maritimæ à centro diſtantia infert ſphæricitatem ejus perfectam. *Ergo maris ſuperficies ſphærica eſt.*

Habemus igitur hanc: *Maris ſuperficies ſphærica eſt*, directè & affirmativè ductam ex ſuâ contradictoriâ, *maris ſuperficies ſphærica non eſt.*

Maneat igitur, extra omnem controverſiam eſſe, dari aſſertiones, quæ directè ex ſuis contradictoriis inferantur. Atqui aſſertio, quæ ex ſuâ contradictoriâ directè infertur, neceſſariò vera eſt (cùm ſit axioma per ſe clariſſimum, id neceſſariò verum eſſe, quod ſuum contradictorium deſtruit, deſtruit autem ſuum contradictorium, quod ex ſuo contradictorio directè ſequitur.) Ergo & aſſertionis contradictoria, ex quâ videlicet deducta eſt aſſertio, falſa eſt. Ergo ex falſo directè

ctè & affirmativè deductum eſt verum. Demonſtrata igitur eſt concluſio in theſibus propóſita.

Quòd vero ejuſmodi demonſtratio, quâ aſſertio ex ſuâ contradictoriâ falsâ directè infertur, verè ſcientiam pariat, ſic ut abſque ulteriori ullâ deductione ad impoſſibile de aſſertionis veritate ſecuri eſſe debeamus, ex jam dictis manifeſtum eſt, cùm lumine naturæ notiſſimum ſit, id neceſſariò verum eſſe, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt, quod ex ſuo contradictorio ſequelâ legitimâ & neceſſariâ infertur. Quòd ſi verum deducatur ex falſo quopiam ſibi non contradictorio, nequaquam talis ratiocinatio ſcientiam pariet, neque enim de veritate aſſertionis ſic deductæ ſecuri eſſe poſſumus, cùm in eâ ratio jam allata deficiat, & proprium falso ſciamus eſſe, ut ex eo falſa deducantur.

His ritè perceptis facilè eruditus Lector perſpiciet, nihil opus eſſe, ut ſingulis Clariſſimi Viri objectionibus & argumentis refellendis immoremur, quæ vel contra me nihil faciant, vel ex jam dictis ſoluta intelligantur. Quia tamen non omnibus ad manum erit opus clariſſimi Viri, viſum eſt ſingula breviter attingere.

Pri-

Primùm ſupponit ex Dialecticâ quædam de conſequentiâ directâ, & dicto (ut vocant) de omni & de nullo. Tum ſententiam exponit ſuam noſtræ oppoſitam. Subjungit deinde : *hanc ſententiam meam ſtabilio everſione omnium illorum, quæ in contrarium afferri poſſe videntur.*

Primum (inquit) *quod ex falſis verum concludere videatur conſtituit hujuſmodi ſyllogiſmus; Omnis leo eſt lapis. Omnis adamas eſt leo. Ergo omnis adamas eſt lapis. In quo* &c. Tali ſyllogiſmo ad probandam aſſertionem meam ego non utor, in quo videlicet verum deducitur ex falſo non contradictorio, qui proinde etiam, ut oſtendi ſuprà, ſcientiam non parit. Primum iſtud igitur me non tangit.

Secundum genus objectionum (inquit) *conſtituunt hypotheſes Aſtronomicæ &c. Quæ licèt fictitiæ tantùm ſint & falſæ, tamen juxta eas calculum eclipſibus, & aliis obſervationibus cœleſtibus convenientem Aſtronomi exhibent.* Deinde poſtquam multis contendit, hinc non probari, verum ex falſo directè elici, *Progredior* (inquit) *ad tertiam inſtantiam, quam ex regulâ falſi depromere licet* &c. contenditque rurſum hîc non elici ex falſo verum. Quo quidem in utroque, cùm illi ego planè aſſentiar, neque ullum in-

de pro aſſertione meâ argumentum petam, non me magis illa tangunt, quàm primum.

Ultimas denique objectiones (inquit) *nobis faceſſunt modi demonſtrandi ab Euclide* 9. *elem. p.* 12. *Cardano l.* 5. *de proport. p.* 201. *& Theodoſio l.* 1. *ſph. p.* 12. *adhibiti*, quò me digitum intendiſſe putat, & veré. Ex his ſiquidem demonſtrandi modis evidenter jam demonſtravi ſuprà, ex falſo elici directè verum; neque affertur quidquam à Clariſſimo Viro, quod demonſtrationem noſtram infirmet. Verbis Clavii ad p. 12. lib. 9. recitatis ſubjungit ex eodem Clavio demonſtrationem p. 12. l. 1. ſph. Theodoſii: Tum (inquit) *ut verum fatear, neſcio ſanè, quid Clævio in mentem venerit, uti & Cardano, quare inſolitum hunc & mirabilem argumentandi modum eſſe putaverint, qui tamen Logicis valde familiaris eſt, & duobus principiis omnium evidentiſſimis & naturâ notiſſimis nititur, hiſce nempe: quòd idem non poſſit ſimul eſſe & non eſſe, item quodlibet aut ſit aut non ſit.* Quid Clavio, Cardano, & cum iſtis aliiſque etiam mihi in hac argumentandi formâ ſit viſum mirabile, dicere in promptu eſt; hoc nimirum, quòd aſſertio probanda (G eſt centrum ſphæ-

ræ) directè ex ſuâ contradictoriâ (G non eſt centrum ſphæræ), conſequentiis legitimis ac neceſſariis deducatur. Quod quidem quotieſcumque evenit, admiratione dignum eſt. Tantum verò abeſt, ut hæc ratio demonſtrandi Logicis valde familiaris ſit, ut etiam non defuerint doctiſſimi viri, quibus ea impoſſibilis videretur. Ut deinde oſtendat vir Clariſſ. hoc diſcurſu verum ex falſo non deduci, repetit demonſtrationem propoſitionis Theodoſianæ, ſed formâ planè diverſâ à Clavianâ illâ, quam priùs recitaverat, in quâ vis argumentationis inter nos controverſæ clariſſimè cernitur. Subjungit denique: *neque ego tam lynceus ſum, ut exinde videre queam, quo pacto ex falſo rerum directè ſequatur. Illud tamen video, quòd ſi* G *demonſtretur non eſſe centrum ſphæræ* (vult, credo, dicere, *ponatur*, cùm demonſtrari nequeat, quod falſum eſt) *neceſſariò ſit admittenda contradictoria ejus affirmativa, quòd* G *ſit centrum ſphæræ.* Ad hæc verba repetam compendio demonſtrationem ſuperiùs datam, quâ, opinor, fiet, ut V.C. tametſi, quod eſt maximè, lynceus non eſſet, clarè perſpiciat, elici directè ex falſo verum.

Quoniam admittit (id quod etiam eo

non

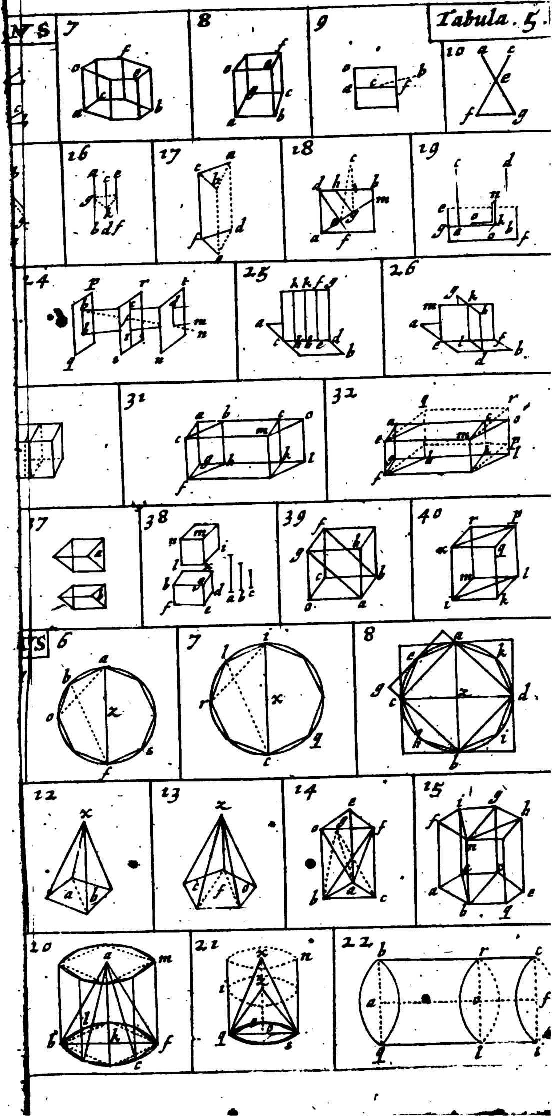
non dante evinceret Claviana demonſtratio) ſi G ponatur non eſſe centrum, ſequi neceſſitate abſolutâ & formali, G eſſe centrum; manifeſtum eſt, G eſſe centrum, directè ſequi ex ſuâ contradictoriâ, G non eſt centrum. Ergo ex vi deductionis conſtat verum eſſe quòd & ſit centrum, cùm lumine naturali notum ſit id eſſe neceſſariò verum, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt, ex ſuo contradictorio directè ſequitur. Habemus igitur quod ex hac (G non eſt centrum) directè deducta ſit hæc vera (G eſt centrum.) Atqui hæc (G non eſt centrum) falſa eſt, cùm jam oſtenderim veram eſſe hanc (G eſt centrum.) Ergo verum directè deductum eſt ex falſo.

Hæc ſunt, Erudite Lector, quæ ſuper hac quæſtione breviter hîc putavi apponenda. Cæterùm nihil dubito, quin Clariſſimus Lipſtorpius eâdem animi æquitate reſponſionem hanc noſtram ſit accepturus, quâ dedit oppugnationem ſuam, & ego illam accepi.

FINIS.

DEC 1 1921

Tabula. 5.



non dante evinceret Claviana demonſtratio) ſi G ponatur non eſſe centrum, ſequi neceſſitate abſolutâ & formali, G eſſe centrum; manifeſtum eſt, G eſſe centrum, directè ſequi ex ſuâ contradictoriâ, G non eſt centrum. Ergo ex vi deductionis conſtat verum eſſe quòd & ſit centrum, cùm lumine naturali notum ſit id eſſe neceſſariò verum, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt, ex ſuo contradictorio directè ſequitur. Habemus igitur quod ex hac (G non eſt centrum) directè deducta ſit hæc vera (G eſt centrum.) Atqui hæc (G non eſt centrum) falſa eſt, cùm jam oſtenderim veram eſſe hanc (G eſt centrum.) Ergo verum directè deductum eſt ex falſo.

Hæc ſunt, Erudite Lector, quæ ſuper hac quæſtione breviter hîc putavi apponenda. Cæterùm nihil dubito, quin Clariſſimus Lipſtorpius eâdem animi æquitate reſponſionem hanc noſtram ſit accepturus, quâ dedit oppugnationem ſuam, & ego illam accepi.

F I N I S.

DEC 1 1921

Tabula. 5.

